Auszug aus
„Analysis III" im WS 1997/98
von Frank Loose

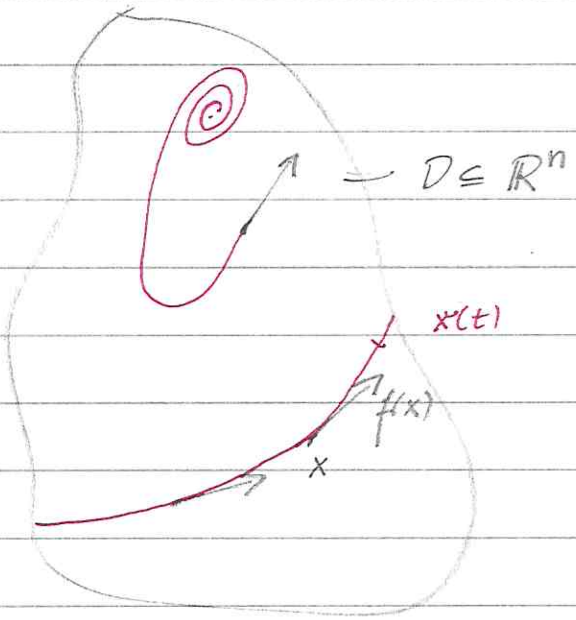
Inhalt:

TEIL II: GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Literatur: 1. O. FORSTER: Kapitel II in Analysis II, Vieweg-Verlag;
2. B. Aulbach: Gew. Differentialgleichungen, Spektrum Akademischer Verlag;
3. V. I. ARNOLD: Ordinary Differential equations, Springer-Verlag
4. M.W. HIRSCH, S. SMALE: Differential equations, dynamical systems, and Linear Algebra, Academic Press.

§8. Grundlegende Konzepte und Beispiele

Grob: Ein dynamisches System besteht aus einem Phasenraum $D \subseteq \mathbb{R}^n$ (Gebiet in $\mathbb{R}^n$) und einer (glatten) Zuordnung φ,



$$\varphi : D \longrightarrow \{\text{Kurven in } D\}$$

$$x \longmapsto \varphi(x) : I(x) \longrightarrow \mathbb{R}$$

„Dynamik von x"

$I(x) = (t_-(x), t_+(x))$ ist dabei ein Intervall, welches $0 \in \mathbb{R}$ enthält. $\varphi^t(x) = \varphi(t; x)$ beschreibt dabei den Zustand von x nach der Zeit t; insbesondere $\varphi^0(x) = x$.

Verträglichkeitsbedingung: Zustand von x nach Zeit $t+s$ ist dergleiche wie der Zustand von $y := \varphi^t(x)$ zur Zeit s:

$$\varphi^s(\varphi^t(x)) = \varphi^{s+t}(x)$$

(insbesondere ist $s \in I(\varphi^t(x)) \Leftrightarrow s+t \in I(x)$.) $\}\ \forall t \in I(x)$.

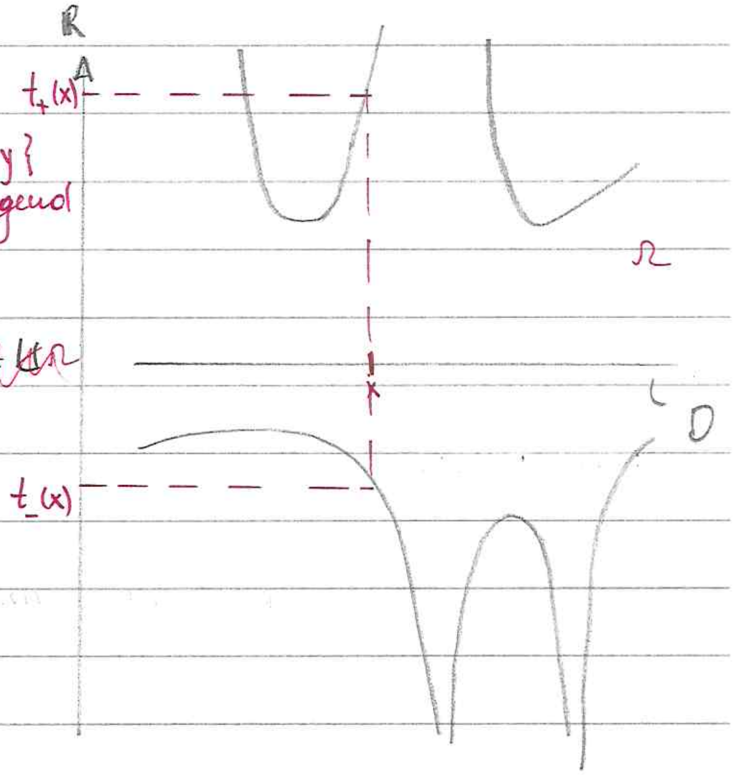
DEFINITION. Ein dynamisches System auf einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine differenzierbare Abbildung $\varphi: \Omega \to D$, $(t,x) \mapsto \varphi^t(x)$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times D$ ist ~~Gebiet~~ offen mit
$\{0\} \times D \subseteq \Omega$; $I(x) := \{(t,y) \in \Omega : x = y\}$ sei zusammenhängend

(b) (i) $\varphi^0(x) = x$ für alle $x \in D$

(ii) $(s+t, x) \in \Omega \Leftrightarrow (s, \varphi^t(x)) \in \Omega$ und es gilt:

$$\varphi^s \circ \varphi^t(x) = \varphi^{s+t}(x)$$



KOMMENTAR. (a) Man nennt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ den Phasenraum des dynamischen Systems; für jedes $x \in D$ heißt $I(x) :=$ (1) $\Omega \cap (\mathbb{R} \times \{x\})$ das Lebens-Intervall, $t_-(x) \in [-\infty, 0)$ die Geburt und $t_+(x) \in (0, +\infty]$ der Tod von x;

(b) die Familie von Abbildungen $(\varphi^t)_{t\in\mathbb{R}}$ heißt auch der <u>Fluß</u> oder die <u>Strömung</u> des dynamischen Systems;

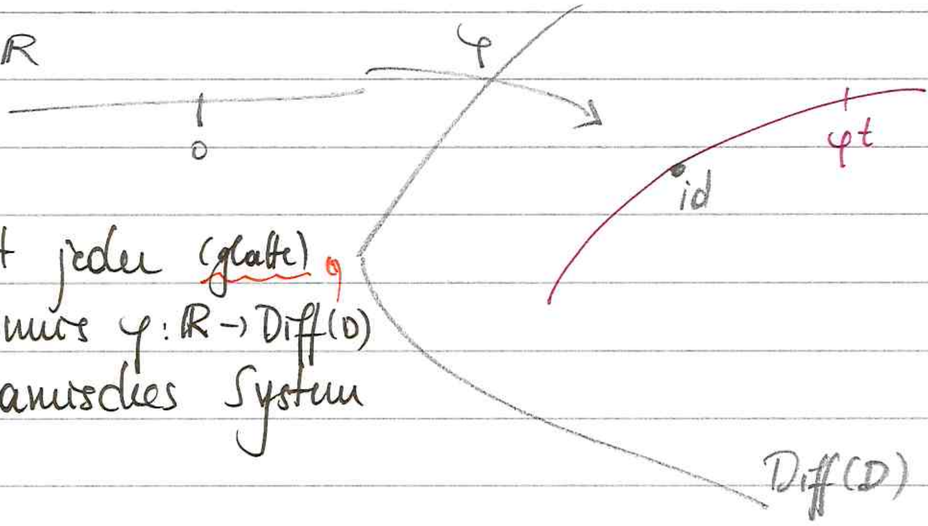
(c) in dem Falle, wo $\Omega = \mathbb{R}\times D$ ist, also $I(x) = \mathbb{R}$ für alle $x \in D$, spricht man von einem <u>globalen Fluß</u> auf D; In diesem Falle sind die Abbildungen φ_t auf ganz D definiert, $\varphi_t : D \to D$. Weil nun nach (b)

$$\text{(i)}\ \varphi^0 = \mathrm{id}_D\ ;\quad \text{(ii)}\ \varphi^s \circ \varphi^t = \varphi^{s+t}\quad \forall s,t\in\mathbb{R}$$

ist gilt: $\varphi^t : D \to D$ ist ein Diffeomorphismus von D, denn $\varphi^{-t} = (\varphi^t)^{-1}$, weil $\varphi^{-t}\circ\varphi^t = \varphi^0 = \mathrm{id} = \varphi^t\circ\varphi^{-t}$ nach (i) und (ii) ist. Es ist also

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Diff}(D),\quad t \longmapsto \varphi^t$$

ein Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{R}$ in die Diffeomorphismengruppe von D.



Umgekehrt definiert jeder (glatte) Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{R} \to \mathrm{Diff}(D)$ ein globales dynamisches System auf D.

(c) Dynamische Systeme sind also geeignet Prozesse zu beschreiben, die durch folgende drei Eigenschaften gekennzeichnet sind:

(i) Endlich-Dimensionalität: jeder mögliche Zustand wird durch (nur) endlich-viele (reelle) Parameter eindeutig bestimmt;

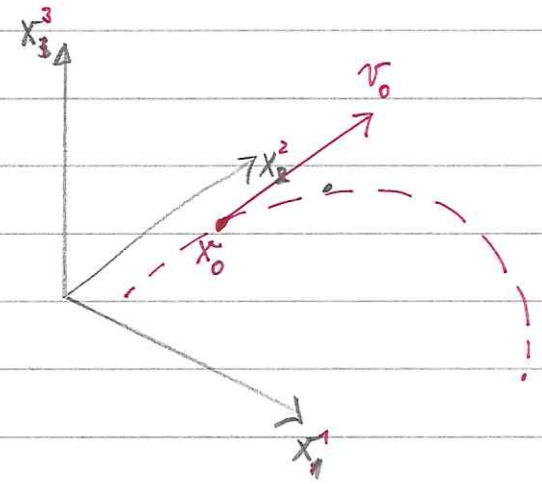
(ii) Determinismus: die Zukunft wie auch die Vergangenheit eines Zustandes sind durch den augenblicklichen Zustand vollständig festgelegt;

(iii) Differenzierbarkeit: die Änderung der Zustände geschieht sowohl in der Zeit als auch in Abhängigkeit des Anfangswertes in differenzierbarer Weise.

BEISPIEL. (a) Die Bahn eines Gegenstandes (z.B. eines Apfels) im Schwerefeld der Erde ist vollständig festgelegt durch seinen augenblicklichen Ort und seine augenblickliche Geschwindigkeit. Also:

Phasenraum ist $D = \mathbb{R}^3_+ \times \mathbb{R}^3$,
wo

$$\mathbb{R}^3_+ := \{(x^1_1, x^2_2, x^3_3) \in \mathbb{R}^3 : x^3_3 > 0\}$$



Problem: wie sieht Dynamik von $(x_0, v_0) \in D$ quantitativ aus?

(b) Die Bahn von N Himmelskörpern (z.B. der Sonne und der 9 Planeten ihres Sonnensystems) ist vollständig festgelegt durch ihren augenblicklichen Ort und ihre augenblickliche Geschwindigkeit. Also: Phasenraum ist

$$D = (\mathbb{R}^{3N} \setminus \Delta) \times \mathbb{R}^{3N},$$

wo

$$\Delta := \{(x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{R}^3)^N : x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j\}$$

ist.

(d) Man schreibt – ungeachtet der Zweideutigkeit – statt $\varphi^t(x)$ auch einfach $x(t)$. Die Verträglichkeitsbedingungen lauten dann eingängiger:

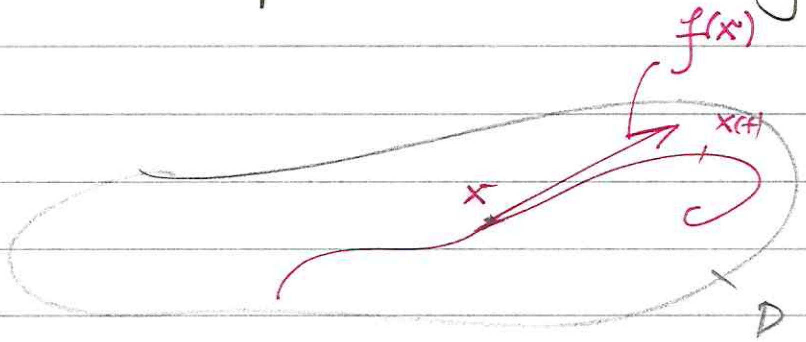
$$x(0) = x; \quad x(t)(s) = x(t+s)$$

DEFINITION. Sei φ ein dynamisches System auf dem Gebiet D. Man nennt nun $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$f(x) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi^t(x) = \dot{x}(0)$$

das zu (D, φ) gehörende Vektorfeld (oder Geschwindigkeitsfeld)

(*)



BEMERKUNG. Sei (D,φ) ein dynamisches System und $f: D \to \mathbb{R}^n$. Dann gilt für alle $x \in D$ und allen $t \in I(x)$:

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

(nicht nur für $t=0$).

Beweis: Sei also $x \in D$, $t \in I(x)$ beliebig. Mit $y = x(t)$ gilt nun

$$f(x(t)) = f(y(0)) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} y(s) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} x(t)(s)$$

$$\overset{!}{=} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} x(t+s) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=t} x(s) = \dot{x}(t).$$

KOMMENTAR. (a) Es erfüllt also jede der Kurven $t \mapsto x(t)$ des dynamischen Systems das System von n Gleichungen ($x = (x^1, \dots, x^n) \in D$), $(f = (f^1, \dots, f^n))$

$$\dot{x}^1(t) = f^1(x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}^n(t) = f^n(x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))$$

oder kurz:

$$\dot{x} = f(x).$$

Man nennt ein solches System ein System gewöhnlicher

<u>Differentialgleichungen</u>. Differentialgleichungen, weil in den Gleichungen sowohl die Funktionen $x^1, \dots, x^n$ als auch ihre Ableitungen $\dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n$ auftauchen; <u>gewöhnlich</u>, weil die Funktionen nur von einer reellen Veränderlichen t abhängen (nicht von mehreren, in welchem Fall man von <u>partiellen Differentialgleichungen</u> spricht.

Vorlesung am 17.12.97 (20)

(b) In den meisten Fällen ist es nun so, daß man das dynamische System (D, φ) quantitativ gar nicht kennt – es aber sehr gerne kennen würde – wohl aber das zugehörige Vektorfeld f. Es stellt sich also dann sofort die fundamentale Frage: ~~In w~~ In wie weit legt das Vektorfeld f das dynamische System (D, φ) fest? Der zentrale Satz wird sein: Jedes (glatte) Vektorfeld f legt genau ein ~~dyna~~ (maximales) dynamisches System (D, φ) fest! (*) $\}$ (1)

(c) In der klassischen Mechanik ordnet man jedem Materieteil eine positive Zahl zu: seine Masse $m > 0$. Eines der grundlegenden Newtonschen Gesetze besagt: Bewegt sich ein Teilchen mit der Masse $m > 0$ unter dem Einfluß einer Kraft F, so befolgt die Bahn $t \mapsto x(t)$ des Teilchens die Gleichung

$$m\ddot{x} = F,$$

(Masse × Beschleunigung = Kraft). Hierbei ist die Kraft eine Funktion nur des Ortes und der Geschwindigkeit, $F = F(x, \dot{x})$ (oft sogar nur des Ortes).

In unserer Sprache heißt das: Man hat einen Phasenraum $D \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Punkten (x,y) und ein Vektorfeld $f: D \to \mathbb{R}^n$, nämlich

$$f\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} y \\ \frac{1}{m} F(x,y) \end{pmatrix}.$$

$\dot{x} = y$
$\dot{y} = \frac{1}{m} F(x,y).$

Die Bahn $t \mapsto x(t)$ zum Anfangswert $(x, \overset{y}{\cancel{\dot{x}}}) \in D$ von $m\ddot{x} = F(x, \overset{y}{\dot{x}})$ ist dann die Lösungskurve zum Anfangswert $(x, \dot{x}) \in D$ der gewöhnl. Dgl.

$$\dot{z} = f(z),$$

$z = (x,y)$.

<u>DEFINITION</u>. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f: D \to \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld.

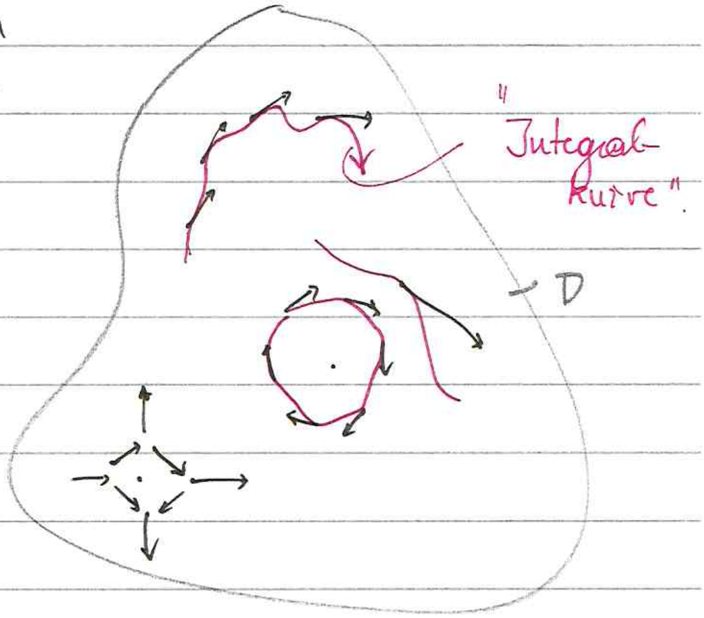
(a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein off. Intervall. Man nennt eine ~~glatte~~ differenzierbare Kurve $x: I \to D$, $t \mapsto x(t)$ eine <u>Lösung der Dgl.</u>

$$\dot{x} = f(x),$$

wenn für alle $t \in I$ gilt: $\dot{x}(t) = f(x(t))$.

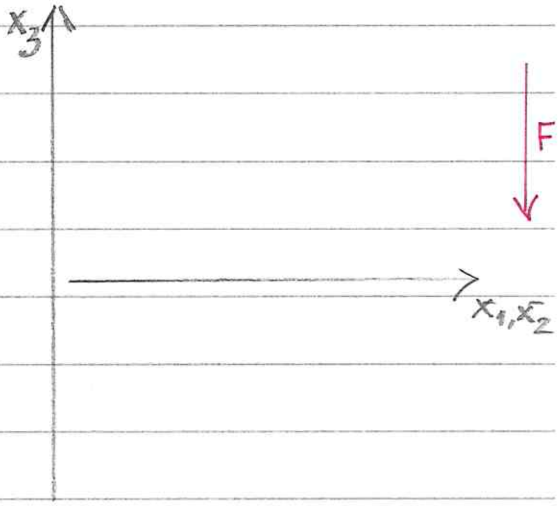
(b) Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$, so nennt man eine Lösung $x: I \to D$ <u>eine Lösung zum Anfangswert</u> $x_0 \in D$, von $\dot{x} = f(x)$, wenn $x(0) = x_0$ ist.

KOMMENTAR. Man verdeutlicht sich das Vektorfeld oft durch das sogenannte Phasendiagramm von f.
Eine Lösungskurve wird auch als Integralkurve bezeichnet, weil man in einfach Fällen die Lösungskurve durch den Prozeß von Stammfunktion-Bildung erhalten kann.



BEISPIELE. ① Der freie Fall

In der Nähe der Erd-Oberfläche zeigt die Beobachtung, daß die Erdanziehungs-Kraft F nahezu unabhängig von Ort und Geschwindigkeit ~~ist~~ und ~~die~~ proportional zu Masse des Teilchens ist: $F(x,\dot{x}) = -mg\,e_3$ (bei geeigneter Wahl der Koordinaten (x^1,x^2,x^3)). ~~all~~



Man erhält also die Dgl. für den freien Fall $\ddot{x} = -g e_3$ oder

$$\dot{x}^1 = y^1, \qquad \dot{y}^1 = 0$$
$$\dot{x}^2 = y^2, \qquad \dot{y}^2 = 0$$
$$\dot{x}^3 = y^3, \qquad \dot{y}^3 = -g$$

Daraus erkennt man unmittelbar, daß

$$x^1(t) = a^1 t + b^1$$
$$x^2(t) = a^2 t + b^2$$
$$x^3(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + a^3 t + b^3$$

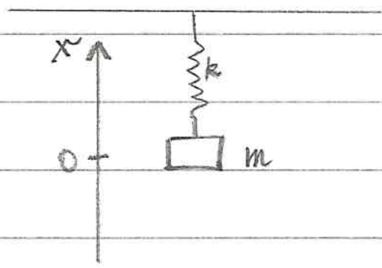
mit Konstanten $a, b \in \mathbb{R}^3$ ist. Die Lösung von $\ddot{x} = -g e_3$ zum Anfang $(x_0, v_0) \in D = \mathbb{R}^3_+ \times \mathbb{R}^3$ ist also:

$$x(t) = -\frac{1}{2} g t^2 \cdot e_3 + t v_0 + x_0 ,$$

ein Parabelstück. Den zugehörigen Fluß würde man so schreiben

$$\varphi^t(x,\dot{x}) = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} -g/2\, t^2 e_3 + t\dot{x} + x \\ -gt \cdot e_3 + \dot{x} \end{pmatrix}.$$

② Das Hookesche Gesetz



Ein ~~Massen~~ Teilchen mit Masse $m > 0$ bewege sich vertikal unter dem Einfluß der Kraft einer Feder. Das Hookesche Gesetz besagt: Die Kraft, die auf den Körper einwirkt, ist proportional zur Auslenkung und entgegengesetzt orientiert:

$$F = F(x, \dot{x}) = -kx$$

($k > 0$: Federkonstante). Die gew. Dgl., die zu lösen ist, ist also

$$m\ddot{x} = -kx.$$

Man setze $\omega^2 := k/m$ $(\omega > 0)$, schreibe $y = \dot{x}$ (also $D = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ in diesem Fall) und löse

$$(*) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega^2 x. \end{aligned}$$

Der Fluß zu $(*)$ ist gegeben durch (systematisch gelöst wird das später):

$$\begin{aligned} x(t) &= x\cos(\omega t) + \frac{y}{\omega}\sin(\omega t) \\ y(t) &= -\omega x\cdot\sin(\omega t) + y\cdot\cos(\omega t). \end{aligned}$$

DEFINITION. Ein System gewöhnlicher Dgl'n m-ter Ordnung auf einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^n$ wird gegeben durch eine differenzierbare Abbildung $f: D \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{(m-1)\text{-mal}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$:

$$x^{(m)} = f(x, \dot{x}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m-1)}).$$

$x^{(m)} = f(x, \ldots, x^{(m-1)})$

BEMERKUNG 2. Man kann die Lösung eines Systems m-ter Ordnung auf einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^n$ stets auf die Lösung eines Systems 1. Ordnung auf dem Gebiet $U := D \times \mathbb{R}^{(m-1)n} \subseteq \mathbb{R}^N$ $(N := m\cdot n)$ zurückführen.

Man definiert nämlich das Vektorfeld $g : U \to \mathbb{R}^N = (\mathbb{R}^n)^m$ durch

$$g(x, y^1, \dots, y^{m-1}) = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^{m-1} \\ f(x, y^1, \dots, y^{m-1}) \end{pmatrix}$$

und löst dann mit $z := (x, y^1, \dots, y^{m-1})$:

$$\dot{z} = g(z).$$

Beweis. Ist $t \mapsto x(t)$ Lösung von $x^{(m)} = f(x, \dots, \overset{(m-1)}{x})$, so ist $z(t) = (x(t), \dot{x}(t), \dots, \overset{(n-1)}{x}(t))$ Lösung von $\dot{z} = g(z)$. Ist $(x(t), y^1(t), \dots, y^{m-1}(t))$ Lösung von $\dot{z} = g(z)$, so ist $x(t)$ Lösung von $\overset{(m)}{x} = f(x, \dots, \overset{(m-1)}{x})$.

$\boxed{}$

Definition. Ein *zeit-abhängiges Vektorfeld* f auf einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist durch eine glatte Abbildung $f : \mathbb{R} \times D \to \mathbb{R}^n$ gegeben. Man nennt das System gew. Dgl'n

$$\dot{x} = f(t, x)$$

nicht-autonom, wenn f explizit von t abhängt. Ist f unabhängig von t, so heißt $\dot{x} = f(x)$ ein *autonomes System*.

BEMERKUNG 3. Man kann die Lösung eines nicht-autonomen Systems $\dot{x}=f(t,x)$ auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$ auf die Lösung eines autonomen auf $\mathbb{R}\times D = U$ wie folgt zurückführen. Man setze $g: U \to \mathbb{R}^{n+1}$,

$$g(s,x) = \begin{pmatrix} 1 \\ f(s,x) \end{pmatrix},$$

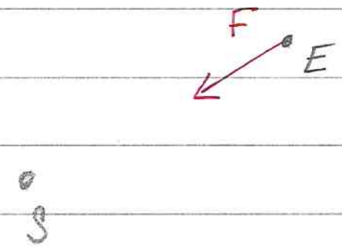
$z := (s,x)$ und löse dann $\dot{z} = g(z)$.

Beweis. Ist $t \mapsto x(t)$ Lösung von $\dot{x} = f(t,x)$ zum Anfang x, so ist $t \mapsto (t, x(t))$ Lösung von $\dot{z} = g(z)$ zum Anfang $(0,x)$. Ist $t \mapsto (s(t), x(t))$ Lösung von $\dot{z} = g(z)$ zum Anfang $(0,x)$, so ist $t \mapsto x(t)$ Lösung von $\dot{x} = f(t,x)$ zum Anfang x. $\square$

BEISPIELE. ① Keplers Problem: Nimmt man die Sonne als (wegen ihrer vergleichsweise großen Masse) unbeweglich im Ursprung des Koordinatensystems $x = (x^1, x^2, x^3)$ an, so bewegt sich ein Planet (unter Vernachlässigung des Einflusses der anderen Planeten) vermöge der Gleichung

$$\ddot{x} = -\frac{x}{|x|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\};$$

der Phasenraum ist also hier $D = (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld $f(x,y) = (y, -x/|x|^3)$, (Konstanten sind hier auf 1 normiert). D.h.: die Kraft $F(x,\dot{x}) = F(x)$ ist zur Sonne hingerichtet und umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes.



Wir werden später sehen:

(i) Ist für die Anfangsbedingung
$(x,\dot{x}) \in D \quad L(x,\dot{x}) := x \times \dot{x} \neq 0$,
so existiert die Lösung $t \mapsto x(t)$
für alle Zeiten, $I(x,\dot{x}) = \mathbb{R}$, und
beschreibt eine Ellipse, Parabel oder eine Hyperbel, je
nachdem ob

$$E(x,\dot{x}) := \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 - \frac{1}{|x|} \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases} \quad \text{ist}$$

$L : D \to \mathbb{R}^3$

($\cancel{L}, E : D \to \mathbb{R}$ sind sogar Bewegungs-Invarianten des Systems.)

② Das N-Körperproblem.

Bewegen sich N Körper mit den Massen $m_1, \dots, m_N > 0$ im 3-dimensionalen Raum nur unter dem Einfluß ihrer gegenseitigen Gravitation, so erfüllen die Koordinaten $x_1, \dots, x_N$ die Gleichungen

$$m_j \ddot{x}_j = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} m_i m_j \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|^3}$$

(universelles Gravitationsgesetz). Der Phasenraum ist also $D = (\mathbb{R}^{3N} \setminus \Delta) \times \mathbb{R}^{3N} \subseteq \mathbb{R}^{6N}$ und das Vektorfeld $f : D \to \mathbb{R}^{6N}$ ist $f(x,y) = (y, -\operatorname{grad} U(x))$, wo $U : D \to \mathbb{R}$,

$$U(x) = -\sum_{i<j} m_i m_j \frac{1}{|x_i - x_j|} \quad \text{ist.}$$

Für $N \geq 3$ sind die Lösungskurven nicht bekannt!

---

bis hier vielleicht!

Vorlesung am 22.12.1997 (21)

SATZ. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: D \to \mathbb{R}$ glatt. Sei $x_0 \in D$, so daß $f(x_0) \neq 0$ ist und $\delta > 0$ derart, daß $f(x) \neq 0$ für alle $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, so gilt für die Funktion $\tau: (x_0-\delta, x_0+\delta) \to \mathbb{R}$

$$\tau(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{f(y)} :$$

(i) ist $I := \text{Bild}(\tau)$, so ist $\tau: (x_0-\delta, x_0+\delta) \to I$ ein Diffeomorphismus, (klar ?!) und für ihre Umkehrung $\varphi: I \to (x_0-\delta, x_0+\delta)$, $\varphi = \tau^{-1}$, gilt: φ ist (die) Lösungskurve von

$$\dot{x} = f(x)$$

zum Anfangswert x_0. („Trennung der Variablen")

Beweis. Es ist $\tau'(x) = \frac{1}{f(x)} \neq 0$, also nach dem ZWS für alle $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ von gleichem Vorzeichen. $\Rightarrow$ τ ist str. monoton und also (wieder wegen ZWS) bijektiv auf sein Bild. Die Umkehrung $\varphi: I \to (x_0-\delta, x_0+\delta)$, $t \mapsto \varphi(t)$ ist nach dem Umkehrsatz auch differenzierbar und es gilt

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{1}{\tau'(\varphi(t))} = f(\varphi(t)).$$

Weil schließlich $\tau(x_0) = 0$, also $\varphi(0) = x_0$ ist, ist φ (die) Lösungskurve von

$$\dot{x} = f(x)$$

zum Anfangswert x_0.

$\boxtimes$

Kommentar: (a) Man kann also 1-dimensionale Systeme vollständig durch "Quadratur" lösen, d.h. durch die Prozesse "Stammfunktion-Bildung" und "Invertierung".
(b) Der Satz zeigt die Berechtigung der folgenden "Rechnung":

$$\dot{x} = f(x) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = f(x) \Rightarrow dt = \frac{dx}{f(x)}$$
$$\Rightarrow \int_0^t dt = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{f(x)} \Rightarrow t(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{f(y)}$$

(Übung: Gleichgewichtslagen, Trennung der Variablen)

BEISPIEL (a) Sei $a \in \mathbb{R}^*$ und $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax$ linear.
Die Lösung $x(t)$ von

$$\dot{x} = ax$$

zum Anfangswert x ist also gegeben (für $a \neq 0$ und $x \neq 0$) durch:

$$t = \int_x^{x(t)} \frac{dy}{ay} = \frac{1}{a}\left(\ln(x(t)) - \ln(x)\right) = \frac{1}{a} \ln \frac{x(t)}{x}$$

also

$$x(t) = e^{at} \cdot x$$

und dies gilt auch für $a = 0$ und $x = 0$.

b) Sei $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 1 + x^2$ (quadratisch in x). Die Lösungskurve $x(t)$ zum Anfangswert $x_0 = 0$ ist gegeben durch

$$t = \int_0^{x(t)} \frac{dy}{1+y^2} = \arctan(x(t)),$$

also:

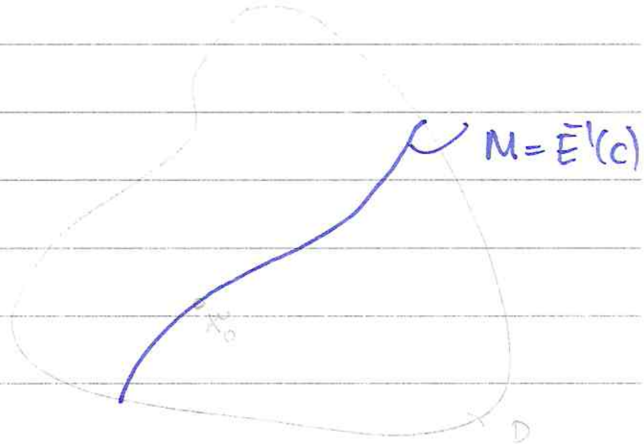
$$x(t) = \tan(t).$$

Beachte: $I(0) = (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ ist endlich, d.h. $x_0 = 0$ ist "in endlichen Zeit im Unendlichen".

Einschub.

DEFINITION. $D \subseteq \mathbb{R}^n$ sei ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld. Eine Funktion $E : D \to \mathbb{R}$ heißt ein 1. Integral (oder eine Bewegungsinvariante) für $\dot{x} = f(x)$, wenn sie unter dem Fluß von $\dot{x} = f(x)$ konstant bleibt, d.h. $E(x(t)) = E(x)$ für alle $t \in I(x)$, für alle $x \in D$.

KOMMENTAR. Ist $c \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert von E (d.h.: ist $E(x) = c$, so ist $\operatorname{grad} E(x) \neq 0$), so ist $M = E^{-1}(c) \subseteq D$ eine glatte Hyperfläche in D (impliziter Funktionensatz). Ist der Anfang $x_0 \in M$, so braucht man also nur das System $\dot{x} = f(x)$ auf M zu lösen (Dimensionsreduktion, denn $\dim M = n-1$).



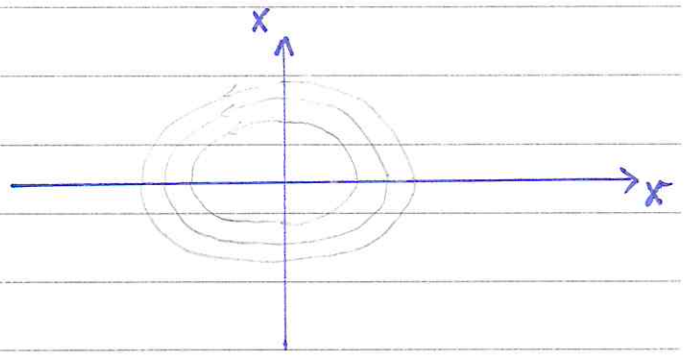
BEISPIEL (harmonischer Oszillator); sei $\omega > 0$ betrachte

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

auf $\mathbb{R}$. Es ist $E : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, \dot{x}) \mapsto \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$ ein 1. Integral, denn

$$\frac{d}{dt} E(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{1}{2}(2\dot{x}\ddot{x} + 2\omega^2 x\dot{x})(t) = \dot{x}(\ddot{x} + \omega^2 x)(t) = 0$$

also $E(x(t)) = E(x) \quad \forall t \in I(x) \; \forall x \in D$.



BEISPIEL. Sei $f: I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $I \subseteq \mathbb{R}$ offen. Betrachte das Newton-System

$$\ddot{x} = f(x)$$

auf I. Man nennt dann eine Funktion $V: I \to \mathbb{R}$ mit

$$-V'(x) = f(x)$$

ein Potential von f (oder auch potentielle Energie für $\ddot{x} = -V'(x)$).

BEMERKUNG 4. Ist $V: I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist $E: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $E(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x)$ ein 1. Integral für das Newton-System

$$\ddot{x} = -V'(x)$$

auf I.

Beweis. siehe Bem. 5.

DEFINITION. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld. Das Newton-System $\ddot{x} = f(x)$ heißt konservativ, wenn es eine glatte Funktion $V: U \to \mathbb{R}$ gibt, so daß $-\operatorname{grad}(V) = f$ ist.

BEMERKUNG 5. Ist $V: U \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, so ist $E: U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 + V(x)$ ein 1. Integral für das konservative Newton-System

$$\ddot{x} = -\operatorname{grad} V(x).$$

Beweis. Es ist

$$\frac{d}{dt} E(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\langle \dot{x}, \dot{x}\rangle + V(x)\right\}(t)$$

$$= \left\{\frac{1}{2}\left(\langle \ddot{x}, \dot{x}\rangle + \langle \dot{x}, \ddot{x}\rangle\right) + \langle \operatorname{grad} V(x), \dot{x}\rangle\right\}(t)$$
$$= \langle \dot{x}, \ddot{x} + \operatorname{grad} V(x)\rangle(t) = 0.$$

▨

BEISPIEL. Das Kepler-System auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

$$\ddot{x} = -\frac{x}{|x|^3}$$

ist konservativ mit $V(x) = -\frac{1}{|x|}$, denn $\operatorname{grad}\left(\frac{1}{|x|}\right) = \frac{-x}{|x|^3}$

DEFINITION. Sei $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ein konservatives Kraftfeld für das Newton-System $\ddot{x} = f(x)$, $f(x) = -\operatorname{grad} V(x)$. Es heißt dann f ein Zentralfeld, wenn V nur vom

Abstand $r = |x|$ abhängt.

<u>KOMMENTAR</u>: (a) Es gibt dann also eine reelle Funktion $v: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ $\quad (\mathbb{R}_+ := (0,\infty))$, so daß $V = v \circ r$ ist mit $r: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_+$, $r(x) = |x|$. Es ist deshalb

$$\operatorname{grad} V(x) = v'(|x|) \cdot \operatorname{grad} r(x).$$

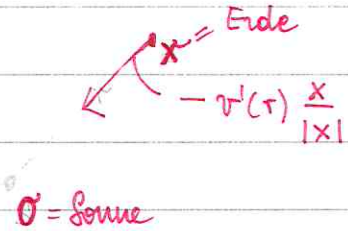
Weil $\frac{\partial}{\partial x_i} |x| = \frac{1}{2|x|} 2x_i$ ist, ist $\operatorname{grad} r(x) = \frac{x}{|x|}$, und somit

$$\operatorname{grad} V(x) = v'(|x|) \cdot \frac{x}{|x|}$$

(b) Sucht man nach der Anziehungskraft zwischen zwei Massen ("Gravitation") und setzt man ein konservatives Kraftfeld an, welches zentral ist (Isotropie des Raumes), so gelangt man zu einem Newton-System der Form

$$\ddot{x} = -v'(|x|) \frac{x}{|x|}$$

Vernünftige Bedingung an $v: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ist dann weiterhin:



i) $v'(r) > 0 \quad \forall r > 0$ (anz. Kraft)
ii) $\lim_{r\to\infty} v'(r) = 0$ (abn. Kraft)

($r \mapsto v'(r)$, monoton fallend)

<u>FRAGE</u>: Welche Funktion $v: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ist das universelle Potential?

Antwort: $v(r) = -\frac{\gamma}{r}$ (mit $\gamma > 0$)

Es gilt sogar (s. ARNOLD: Classical Mechanics, S. 37/38): sind alle beschränkten Bahnen von $\ddot{x} = -v'(|x|)\,x/|x|$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ geschlossen, so muß $v(r) = -\gamma/r$ für ein $\gamma > 0$ sein.

Einschub zu Ende

§9. Existenz- und Eindeutigkeitssätze

DEFINITION. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f: D \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld.

(a) Es heißt f Lipschitz-stetig, wenn es ein $L > 0$ gibt, so daß für alle $x, y \in D$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|$$

(b) Es heißt f lokal Lipschitz-stetig, wenn jedes $p \in D$ eine Umgebung $\mathcal{U} \subseteq D$ besitzt, so daß $f|\mathcal{U}$ Lipschitz-stetig ist.

BEMERKUNG 1. Sei $f: D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein $\mathcal{C}^1$-Vektorfeld (d.h. f ist stetig differenzierbar). Es ist dann f lokal Lipschitz-stetig.

Erinnere: Seien $(V, |\cdot|)$ und $(W, |\cdot|)$ endlich-dimensionale, normierte Vektorräume (etwa $|\cdot|$ von einem Skalarprodukt kommend). Für eine lineare Abbildung $T: V \longrightarrow W$ setzt man die Operator-Norm $\|T\|$ fest durch

$$\|T\| := \max\{|Tv| : |v| \leq 1\}.$$

Es gilt dann für alle $v \in V$:

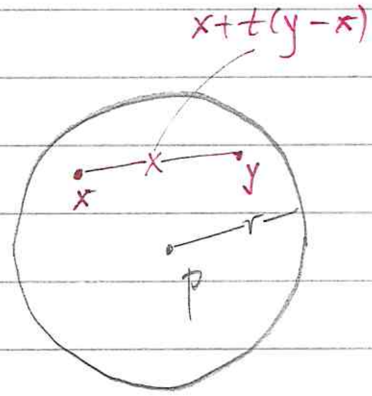
$$|Tv| \leq \|T\| \cdot |v|,$$

denn (für $v \neq 0$): $|Tv| = |v| \cdot |T(\frac{v}{|v|})| \leq \|T\| \cdot |v|$.

Beweis von Bem. 1. Sei $p \in D$ beliebig und $r > 0$ so klein gewählt, daß $\overline{B}_r(p) \subseteq D$ ist. Weil $K := \overline{B}_r(p)$ kompakt ist und $K \to \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto \|Df(x)\|$ ($\|\cdot\|$ ist hier bzgl. der euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^n$) stetig, folgt: $\exists L > 0 : \|Df(x)\| \leq L$ $\forall x \in K$. Für alle $x, y \in B_r(p)$ ist nun

$$x + t(y-x) \in B_\varepsilon(p)$$

und daher



$$|f(x) - f(y)| = \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x + t(y-x))\, dt \right|$$

$$= \left| \int_0^1 Df(x+t(y-x)) \cdot (y-x)\, dt \right|$$

$$\leq \int_0^1 \|Df(x+t(y-x))\|\, dt \cdot |y-x|$$

$$\leq L\, |y-x| .$$

$\boxed{/\!/}$

BEMERKUNG 2. $D \subseteq \mathbb{R}^n$ sei ein Gebiet und $f: D \to \mathbb{R}^n$ ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld. Ist $K \subseteq D$ beliebiges Kompaktum, so ist $f|K$ Lipschitz-stetig.

Beweis. Angenommen nicht. $\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists (x_n, y_n) \in K \times K$: $|f(x_n) - f(y_n)| > n|x_n - y_n|$. Nach 2-mal. Übergang zu Teilfolgen, darf man annehmen $(x_n) \to p \in K$, $(y_n) \to q \in K$, denn K ist kompakt.

Behauptung: $p = q$.

Denn: ist $\varepsilon > 0$ beliebig, wähle n so groß, daß $|x_n - p| < \varepsilon/3$, $|y_n - q| < \varepsilon/3$. Dann ist

$$|p-q| \leq |p - x_n| + |x_n - y_n| + |y_n - q| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{n}|f(x_n) - f(y_n)| + \frac{\varepsilon}{3}$$

Sei nun $M > 0$ so, daß $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in K$ und n werde erf. noch mal vergrößert, so daß $2M/n < \varepsilon/3$ ist. Dann ist

$$|p - q| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \Rightarrow p = q.$$

Aber f ist lokal Lipschitz-stetig $\Longrightarrow \exists r > 0\ \exists L > 0\ \forall x, y \in B_r(p)$:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|.$$

Ist aber n so groß, daß $x_n, y_n \in B_r(p)$ liegen, und $n \geq L$, so ist

$$|f(x_n) - f(y_n)| > n\,|x_n - y_n| > L\,|x_n - y_n| \;:\; \lightning$$

$\square$

<u>SATZ 1</u> (Picard-Lindelöf). $D \subseteq \mathbb{R}^n$ sei ein Gebiet und $f: D \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld. Sei $x_0 \in D$. Dann existiert ein $\delta > 0$, so daß es <u>genau eine</u> Lösung $x: (-\delta, +\delta) \to D$ von $\dot{x} = f(x)$ mit $x(0) = x_0$ gibt.

(a) Existenz

Beweis. Eine stetige Funktion $x: I \to D$ ist genau dann eine Lösung von $\dot{x} = f(x)$, wenn gilt

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f \circ x(\tau)\, d\tau \qquad (*)$$

(beachte: Hauptsatz liefert: ist x stetig und Lösung von $(*)$, so ist x differ. und ~~&&f~~ $\dot{x} = f \circ x$.)

Sei nun $r > 0$ so klein, daß $\overline{B}_r(x_0) \subseteq D$; sei $L > 0$ eine Lipschitz-Konstante für $f|\overline{B}_r(x_0)$ (Bem. 2) und sei $|f|\,|\overline{B}_r(x_0) \leq M$. ~~Man setzt nun~~ Wähle nun

$$0 < \delta := \cancel{\leq} \min\left\{\frac{1}{L}, \frac{r}{M}\right\},$$

und beginnt folgende Iteration (Picard-Lindelöf):

Setze $u_k : (-\delta, +\delta) \to D$ $(k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ fest durch:

$$u_0(t) \equiv x_0$$

$$u_{k+1}(t) := x_0 + \int_0^t f \circ u_k(\tau)\, d\tau$$

Es gilt:

(i) $u_{k+1}(t) \in \overline{B}_r(x_0) \subseteq D \quad \forall t \in (-\delta, +\delta)$ und damit ist u_{k+1} überhaupt erst wohldefiniert: $|u_{k+1}(t) - x_0| \leq \int^t M\, d\tau \leq M\delta \leq r$ (weil $\delta \leq \frac{r}{M}$ ist), denn nach Induktion ist $u_k(\tau) \in \overline{B}_r(x_0)$.

(ii) u_k ist stetig (sogar besser): ist klar.

Behauptung: Für jedes $t \in (-\delta, +\delta)$ ist $(u_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und setzt man

$$x(t) := \lim_{k\to\infty} u_k(t),$$

so gilt: $(u_k) \longrightarrow x$ gleichmäßig.

Dazu: Sei $l \geq k \geq k_0$. ~~Dann~~ Es ist:

$$|u_{k+1}(t) - u_k(t)| \leq \int_0^t |f \circ u_{k}(\tau) - f \circ u_{k-1}(\tau)|\, d\tau$$

$$\leq L \int_0^t |u_{k}(\tau) - u_{k-1}(\tau)|\, d\tau$$

es ist $\quad |u_1(t) - u_0(t)| \leq \left|\int_0^t f(x_0)\, d\tau\right| \leq M\cdot\delta,$

induktiv wird behauptet: $|u_{k+1}(t) - u_k(t)| \leq M\cdot\delta^{k+1}\cdot L^k$,
denn:

$$|u_{k+1}(t) - u_k(t)| \leq \int_0^t |f\circ u_k(\tau) - f\circ u_{k-1}(\tau)|\, d\tau$$

$$\leq L \int_0^t |u_k(\tau) - u_{k-1}(\tau)|\, d\tau \leq L\delta\cdot(M\delta^k L^{k-1}) = M\delta^{k+1}L^k.$$

Für $l \geq k \geq k_0$ ist deshalb:

$$|u_l(t) - u_k(t)| = \left|\sum_{j=0}^{l-k-1} u_{j+1}(t) - u_j(t)\right| \leq M\delta \cdot \sum_{j\geq k_0} (\delta L)^j < \varepsilon$$

für k_0 groß genug, denn $\delta L < 1$ (gleichmäßig in t).

Es folgt: x ist stetig und es ist:

$$x(t) = \lim_{k\to\infty} u_{k+1}(t) = x_0 + \lim_{k\to\infty} \int_0^t f\circ u_k(\tau)\,d\tau$$

Weil schließlich auch $(f\circ u_k)$ gleichmäßig gegen $f\circ x$ konvergiert, hat man tatsächlich

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f\circ x(\tau)\,d\tau .$$

Vorlesung
vom 12.1.98 (23)

(b) Eindeutigkeit: Sei $\delta < \min\{\frac{1}{L}, \frac{r}{M}\}$ wie oben und angenommen $x, \tilde{x} : (-\delta, +\delta) \to D$ lösen $\dot{x} = f(x)$ zum Anfangswert $x_0 \in D$. Sei $0 < a < \delta$ beliebig und

$$Q := \max_{t\in[-a,+a]} |x(t) - \tilde{x}(t)| =$$

Dann gilt: $Q = |x(t_0) - \tilde{x}(t_0)|$ für ein $t_0 \in [-a, +a]$ und es ist:

$$Q = |x(t_0) - \tilde{x}(t_0)| = \left|\int_0^{t_0} (\dot{x}(t) - \dot{\tilde{x}}(t))\,dt\right|$$

$$\leq \int_0^{t_0} |f\circ x(t) - f\circ\tilde{x}(t)|\,dt$$

Nun ist $x(t), \tilde{x}(t) \in B_r(x_0)$, wegen $\delta < \frac{r}{M}$ (weil $|x(t) - x_0| \leq \int_0^t |f\circ x(\tau)|d\tau < M\delta$ und weil L Lipschitz-Konstante für $f|\bar{B}_r(x_0)$ ist, gilt:

$$0 \leq Q \leq \int_0^{t_0} L\,|x(t) - \tilde{x}(t)|\,d\tau \leq LQ\cdot\delta \cancel{<Q},$$

Weil $\delta < \frac{1}{L}$ ist, folgt $Q = 0$, also $x(t) = \tilde{x}(t)$ $\forall t\in[a,a]$;
da $0 < a < \delta$ beliebig, folgt:

$$x(t) = \tilde{x}(t) \quad \forall t \in (-\delta, +\delta).$$

$\boxtimes$

~~Satz 1.~~

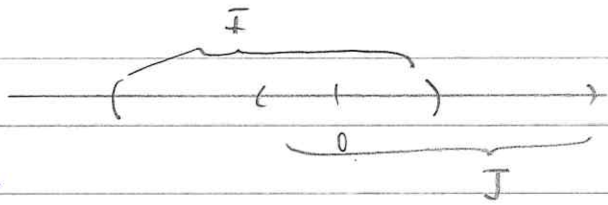
DEFINITION. Sei $f: D \to \mathbb{R}^n$ Vektorfeld und $x_0 \in D$. Eine Lösung $x: I \to D$ von $\dot{x} = f(x)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ offen, heißt maximal, wenn gilt: ist $\tilde{I} \supseteq I$ und $\tilde{x}: \tilde{I} \to D$ Lösung von $\dot{x} = f(x)$ mit $\tilde{x}|I = x$, so gilt bereits $I = \tilde{I}$.

SATZ 2. Sei $f: D \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld und $x_0 \in D$. Dann existiert genau eine maximale Lösung $x: I \to D$ ~~mit~~ von $\dot{x} = f(x)$ mit $0 \in I$ und $x(0) = x_0$.

Beweis. (a) Sei $I, J \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I \cap J$ und seien $x: I \to D$ und $y: J \to D$ Lösungen von $\dot{x} = f(x)$ mit $x(0) = y(0) = x_0$.
Sei

$$A = \{t \in I \cap J : x(t) = y(t)\}$$

Beh.: $A = I \cap J$.



Denn: i) A ist abgeschlossen, weil $x - y: I \cap J \to \mathbb{R}$ stetig ist;
ii) A ist auch offen, denn ist $t_0 \in A$, so existiert ein $\delta > 0$, so daß auch $x(t) = y(t)$ $\forall t$ mit $|t - t_0| < \delta$, denn ~~x, y~~ $t \mapsto x(t-t_0)$, $t \mapsto y(t-t_0)$ sind ~~auch~~ Lösungen von $\dot{x} = f(x)$ zum AW $x(t_0) = y(t_0) \in D$ (Satz 1).
iii) $A \neq \emptyset$, denn $0 \in A$.
Weil $I \cap J$ zusammenhängend ist, folgt: $A = I \cap J$.

(b) Sei nun $\{(x, I)\}$ die Menge aller Lösungen von $\dot{x} = f(x)$ zum AW $x(0) = x_0$. Setze

$$I_{max} := \bigcup_{\substack{(x,I) \\ \text{Lösung}}} I$$

Wegen (a) existiert nun auch genau ein $x_{max}: I_{max} \to D$, so daß $x_{max}(0) = x_0$ und x_{max} Lösung von $\dot{x} = f(x)$ ist. Offenbar ist x_{max} eine maximale Lösung und auch die einzige nach Konstruktion.

$\boxed{\text{A}}$

Kommentar: Man schreibt $I(x_0) := I_{max}$ und setzt

$$I(x_0) = (t_-(x_0), t_+(x_0)),$$

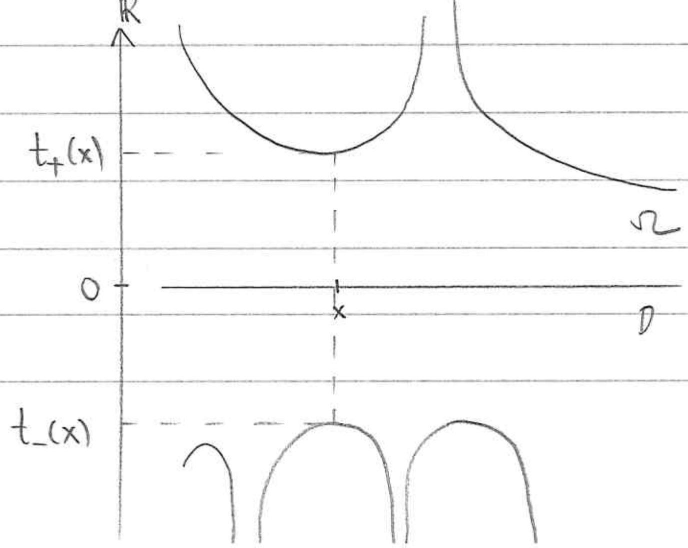
mit $t_-(x_0) \in [-\infty, 0)$ und $t_+(x_0) \in (0, \infty]$ und nennt $I(x_0)$ das Lebens-Intervall von x_0, $t_-(x_0)$ die Geburt und $t_+(x_0)$ den Tod von x_0.

DEFINITION. Sei $f: D \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld und für jedes $x \in D$ sei $I(x) = (t_-(x), t_+(x))$ das Lebensintervall von x. Man setzt

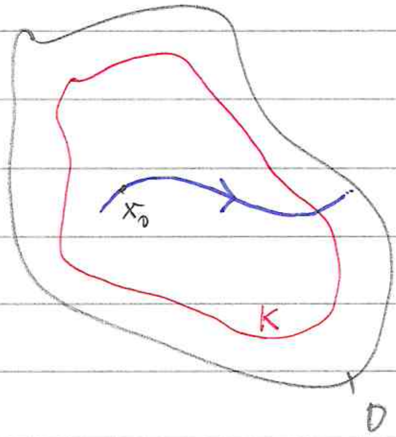
$$\Omega := \bigcup_{x \in D} I(x) \times \{x\} \subseteq \mathbb{R} \times D,$$

und nennt $\varphi: \Omega \to D$, $(t, x) \longmapsto \varphi^t(x) = x(t)$ den zu f gehörenden Fluß (bzw. Strömung, oder das zu f gehörende dynamische System)

PROBLEM. Bis jetzt ist nicht mal klar, ob Ω offen ist, geschweige denn Stetigkeitseigenschaften von φ in Abh. von x!



Satz 3. Sei $I=(t_-,t_+)\subseteq \mathbb{R}$ und $x: I\to D$ eine maximale Lösung von $\dot{x}=f(x)$ für ein C^1-Vektorfeld $f: D\to \mathbb{R}^n$. Ist $t_+<\infty$ und $K\subseteq D$ ein Kompaktum, so gibt es ein $0<t_0<t_+$, so daß gilt: $x(t)\notin K$ $\forall\, t_0<t<t_+$



Kommentar. (a) Eine analoge Aussage gilt, wenn $t_- > -\infty$ ist.
(b) Satz 3 besagt: wenn $t\mapsto x(t)$ schon vorzeitig stirbt, dann nur so, daß $t\mapsto x(t)$ jedes Kompaktum verläßt, wenn $t\mapsto t_+$ strebt, d.h. $x(t_j)$ strebt zum Rand von D oder $|x(t_j)|\to\infty$ für eine Folge $(t_j)\to t_+$.
(c) Weiß man ~~z.B.~~, daß $x(t)\in K$ $\forall t\geq 0$ ist, für ein Kompaktum $K\subseteq D$ (z.B. wenn man weiß, daß $x(t)\longrightarrow p$ (für $t\to t_+$)), so muß notwendig $t_+=\infty$ sein.

Beweis. Weil $K\subseteq D$ kompakt ist, $\exists\, r>0$: $\overline{B}_r(x)\subset D$ $\forall x\in K$ (denn $\operatorname{dist}(K,\partial D)>0$). Sei $L>0$ eine Lipschitz-Konstante für $f|K$ und M eine Schranke für $|f|\,|K$. Ist nun $x(t)\in K$ für $0<t<t_+$, so zeigt der Existenzbeweis: $t_+\geq t+\delta$ mit

$$\delta=\frac{1}{2}\min\left\{\frac{1}{L},\frac{r}{M}\right\}$$

Das zeigt: ist $t_+<\infty$, so muß $x(t)\notin K$ für alle $t_0<t<t_+$ mit $t_0:=t_+-\delta$ sein.

$\boxed{q}$

PROBLEM: Offenheit von Ω und selbst wenn $(t_0, x_0) \in \Omega$ und $\varphi^t(x)$ in einer Umgebung $U \subseteq D$ von x_0 definiert ist: warum ist $|\varphi^t(x) - \varphi^t(x_0)|$ klein, wenn $|x - x_0|$ klein ist?

LEMMA (Gronwall). Sei $u : [0,b] \to \mathbb{R}_+ = \{x \geq 0\}$ stetig, $L, C \geq 0$ und es gelte für alle $t \in [0,b]$:

$$u(t) \leq C + \int_0^t L u(\tau)\, d\tau .$$

Dann gilt: $u(t) \leq C \cdot e^{Lt}$ für alle $t \in [0,b]$.

Beweis. 1. Fall: $C > 0$: setze $U : [0,b] \to \mathbb{R}_+$

$$U(t) := C + \int_0^t L u(\tau)\, d\tau$$

$\Rightarrow U(t) \geq C > 0 \ \forall t$ und $U \in \mathcal{C}^1[0,b]$ mit $\dot{U} = Lu$.
Nun ist

$$\frac{d}{dt} \log U(t) = \frac{\dot{U}}{U}(t) = L \cdot \frac{u}{U} \leq L$$

nach Voraussetzung, also:

$$\log U(t) - \log U(0) = \int_0^t \frac{d}{d\tau} \log U(\tau)\, d\tau \leq Lt,$$

$$\Longrightarrow \quad u(t) \leq U(t) \leq U(0) e^{Lt} = C e^{Lt}.$$

2. Fall: $C = 0$: wähle $c_n > 0$ mit $(c_n) \searrow 0$

$\Rightarrow \forall t \in [0,b]: \quad u(t) \leq c_n e^{Lt} \quad \Rightarrow \quad u(t) = 0 \quad \forall t \in [0,b].$

$\square$

es gibt ein $L>0$, so daß

Vorlesung am 11.1.98 (24):

Satz 4. Sei $f: D \to \mathbb{R}^n$ ein C^L Vektorfeld und $x_0 \in D$. Ist $0 < b < t_+(x_0)$, so existiert eine Umgebung $U \subseteq D$ von x_0, so daß für alle $x \in U$ gilt: $t_+(x) > b$ und für alle $t \in [0,b]$ gilt:

$$|\varphi^t(x) - \varphi^t(x_0)| \leq |x - x_0| \cdot e^{Lt}.$$

bedeutet, **daß** t_+ halbstetig v. u. ist.

Kommentar: Das zeigt dann, daß $\Omega = \bigcup_{x\in D} I(x) \times \{x\} \subseteq \mathbb{R} \times D$ offen ist und daß die Lösung stetig vom Anfangswert abhängt, denn für festes $t \in [0,b]$ ist ja dann

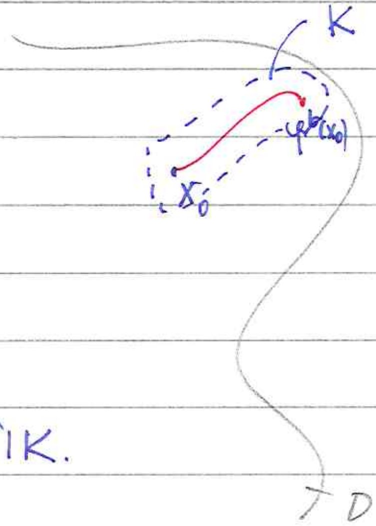
$$\lim_{x \to x_0} |\varphi^t(x) - \varphi^t(x_0)| \leq \lim_{x \to x_0} |x - x_0| e^{Lt} = 0,$$

also

$$\lim_{x \to x_0} \varphi^t(x) = \varphi^t(x_0).$$

Beweis von Satz 4. Weil $\{\varphi^t(x_0) : 0 \leq t \leq b\}$ kompakt ist, gibt es ein $r > 0$, so daß

$$\overline{B}_r(\varphi^t(x_0)) \subseteq D \quad \forall t \in [0,b].$$



$\Rightarrow$

$$K := \bigcup_{t \in [0,b]} \overline{B}_r(\varphi^t(x_0)) \overset{\subseteq D}{} \text{ ist kompakt.}$$

Sei $L > 0$ eine Lipschitz-Konstante für $f|K$.

Sei nun $|x-x_0|<\delta$. Für $0<\cancel{t}\,a < \min\{t_+(x_0), t_+(x)\}$ ist nun mit $u:[0,a]\to\mathbb{R}^+$, $u(t)=|\varphi^t(x)-\varphi^t(x_0)|$:

$$u(t) = \left|\int_0^t \frac{d}{d\tau}(\varphi^\tau(x)-\varphi^\tau(x_0))\,d\tau\right| + \{u(0)\}$$

$$\leq u(0) + \int_0^t |f\circ\varphi^\tau(x) - f(\varphi^\tau(x_0))|\,d\tau$$

warum liegt denn das in K?

$$\leq u(0) + \int_0^t L\,|\varphi^\tau(x)-\varphi^\tau(x_0)|\,d\tau$$

$$= u(0) + L\int_0^t u(\tau)\,d\tau.$$

$\Rightarrow$ (Lemma)

(*) $$|\varphi^t(x)-\varphi^t(x_0)| \leq |x-x_0|\,e^{Lt} \quad \forall\, 0\leq t\leq a.$$

Man wähle nun $\delta < \min\{re^{-Lb}, \frac{1}{L}, \frac{r}{M}\}$, also $\delta e^{Lb}<r$. Wäre nun $t_+(x)\leq b < t_+(x_0)$, so würde für $a > t_+(x) - \delta$ folgen:

$$|\varphi^t(x)-\varphi^t(x_0)| \leq \delta\cdot e^{La} \leq \delta e^{Lb} < r,$$

also

$$\varphi^t(x)\in K \quad \forall x\in[0,a] \quad \Big\}\ \text{s.o.}$$

Nach Satz 3 wäre dann aber $t_+(x) > a+\delta$. Es muß also $t_+(x)>b$ sein. Insbesondere kann man dann auch $a:=b$ wählen und erhält:

$$|\varphi^t(x)-\varphi^t(x_0)| \leq |x-x_0|\,e^{Lt} \quad \forall\, 0\leq t\leq b.$$

$\blacksquare$

KOROLLAR 1. Sei $f: D \to \mathbb{R}^n$ ein C^1 Vektorfeld und $\varphi: \Omega \to D$ das induzierte dynamische System. Es ist dann φ stetig.

Beweis. (a) Ist $(t_0, x_0) \in \Omega$, so existiert ein $\delta > 0$, so daß auch $(t_0+\delta, x_0) \in \Omega$. $\Longrightarrow$ (Satz 4) $\exists\, U \subseteq D$ Umg. von x_0 : $(t_0+\delta, x) \in \Omega$ für alle $x \in U$, also ist

$$(0, t_0+\delta) \times U \subseteq \Omega,$$

welches eine Umgebung von (t_0, x_0) ist. Also ist Ω offen.

(b) Sei nun $(t_0, x_0) \in \Omega$ $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ so klein, daß für $|x - x_0| < \delta$ gilt: $t_+(x) > t_0$. Man verkleinere $\delta > 0$ derart, daß sowohl

$$|\varphi^t(x) - \varphi^t(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für $|x - x_0| < \delta$, als auch $|\varphi^t(x_0) - \varphi^{t_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $|t - t_0| < \delta$. Für alle $(t,x) \in \Omega$ mit $|t - t_0| < \delta$, $|x - x_0| < \delta$ ist deshalb:

$$|\varphi^t(x) - \varphi^{t_0}(x_0)| \le |\varphi^t(x) - \varphi^t(x_0)| + |\varphi^t(x_0) - \varphi^{t_0}(x_0)|$$
$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon .$$

Also ist φ stetig in (t_0, x_0).

$\boxed{q}$

KOROLLAR 2. Es ist für ~~$x \in D$, $s, t \in \mathbb{R}$~~ $(t,x) \in \Omega$ das Paar $(t+s, x) \in \Omega$, genau wenn $(s, \varphi^t(x)) \in \Omega$ ist und es gilt dann

$$\varphi^{t+s}(x) = \varphi^s \circ \varphi^t(x) .$$

Beweis: Sei $(t,x) \in \Omega$. Man betrachte nun die Kurven

$$\psi_1 : (t_-(x) - t,\ t_+(x) - t) \to D,\ \tau \mapsto \varphi^{t+\tau}(x)$$

$$\psi_2 : (t_-(\varphi^t(x)),\ t_+(\varphi^t(x))) \to D,\ \tau \to \varphi^\tau(\varphi^t(x))$$

Es ist dann: $\frac{d}{d\sigma}\psi_1 = f \circ \varphi^{t+\sigma}(x) = f \circ \psi_1(\sigma)$
und
$$\frac{d}{d\sigma}\psi_2 = f \circ \varphi^{\tau}(\varphi^t(x)) = f \circ \psi_2(\sigma),$$

sowie $\psi_1(0) = \psi_2(0) = \varphi^t(x) \in D$. Außerdem sind beides maximale Lösungskurven von $\dot{x} = f(x)$. Daraus:

$$t_-(\varphi^t(x)) = t_-(x) - t\ ,\quad t_+(\varphi^t(x)) = t_+(x) - t$$

(hier ist $-\infty - t := -\infty$ ~~für~~ und $+\infty - t := +\infty$ für $t \in \mathbb{R}$ gesetzt).

und $\forall s \in (t_-(x) - t,\ t_+(x) - t)$ gilt: $\varphi^s \circ \varphi^t(x) = \varphi^{s+t}(x)$

wegen der Eindeutigkeit der Lösung zum gleichen Anfangswert. $\square$

KOMMENTAR. Wir haben also jetzt, daß $\varphi : \Omega \to D$ tatsächlich ein dynamisches System im Sinne unserer Definition aus §8 ist, außer der noch zu beweisenden Tatsache (siehe §11), daß gilt: Ist $f \in C^r(D;\mathbb{R}^n)$, so ist auch $\varphi \in C^r(\Omega;\mathbb{R}^n)$, insbesondere: ist f glatt (d.h. C^∞), so auch φ.

§10. Lineare Systeme

$\rightarrow$ (1)

DEFINITION. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall und $A: I \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ eine C^1-Abb. Man nennt

(a) $$\dot{x} = A(t)\,x$$

ein (nicht-autonomes), homogenes, lineares System.

(b) Ist $b: I \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abb., so heißt

$$\dot{x} = A(t)\,x + b(t)$$

ein (nicht-autonomes), inhomogenes, lineares System.

KOMMENTAR. (a) Ist allgemeiner $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \to \mathbb{R}^n$ ein zeit-abhängiges C^1-Vektorfeld, so existiert nach (2) ~~dem~~ Existenz- und Eindeutigkeitssatz zu jedem Paar $(t_0, x_0) \in D$ genau eine (maximale) Lösung $x: J \to \mathbb{R}^n$ (mit $(t, x(t)) \in D \ \forall t \in J$) mit $x(t_0) = x_0$ und $\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \ \forall t \in J$. ($J \subseteq I$)

(b) Insbesondere im Fall $D = I \times \mathbb{R}^n$, $f(t,x) = A(t)x + b(t)$ kann eine maximale Lösung höchstens auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ existieren, denn $(t, x(t)) \in D = I \times \mathbb{R}^n$ sein.

Vorlesung am 19.1.95 (25)

BEMERKUNG.(1) Sei $a: I \to \mathbb{R}$, $0 \in I$, und $x_0 \in \mathbb{R}$. Die eindeutige Lösung von $\dot{x} = a(t)\,x$ zum Anfangswert x_0 wird gegeben durch $x: I \to \mathbb{R}$,

$$x(t) = \exp\left(\int_0^t a(s)\,ds\right) x_0 .$$

Beweis. Offenbar ist $x(0) = x_0$ und $\dot x(t) = x(t)\,a(t)$ $\forall t \in I$. $\boxed{\text{Ü}}$

KOMMENTAR. Man kann sich eine Lösungsformel von $\dot x = a(t)x$ so "herleiten":

$$\frac{dx}{dt} = a(t)\,x \iff \frac{dx}{x} = a(t)\,dt \implies \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x} = \int_0^t a(\tau)\,d\tau$$

$$\iff \log x(t) - \log x_0 = \int_0^t a(s)\,ds \iff x(t) = x_0 \cdot \exp\left(\int_0^t a(s)\,ds\right).$$

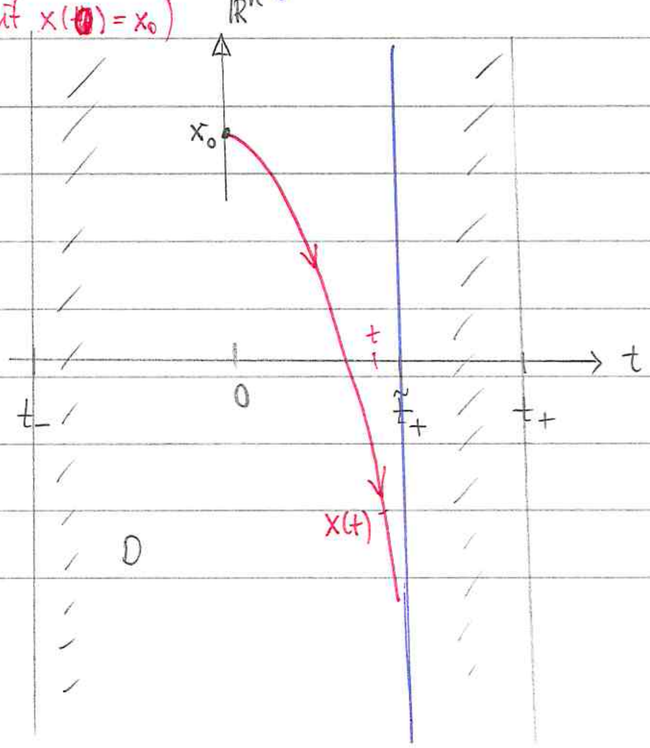
(Meth. der Trennung der Variablen).

SATZ 1. Seien $A: I \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, $b: I \to \mathbb{R}^n$ C^1-Abbildungen und $\dot x = A(t)x + b(t)$ das zugehörige lineare System. Sei $\tilde I \subseteq I$ und $x: \tilde I \to \mathbb{R}^n$ eine maximale Lösungskurve. Dann ist bereits $\tilde I = I$.

Sei $t_0 \in \tilde I$ ~~oBdA $0 \in \tilde I$, $x(0) = x_0$~~

Beweis. Sei $I = (t_-, t_+)$ und $\tilde I = (\tilde t_-, \tilde t_+)$. Angenommen: o.E. $\tilde t_+ \lneq t_+$.

Ist $x: \tilde I \to \mathbb{R}^n$ max. Lös.-kurve (mit $x(t_0) = x_0$) von $\dot x = A(t)x + b(t)$ $\implies$



$$t \mapsto (t, x(t)) : \tilde I \to I \times \mathbb{R}^n = D$$

ist max. Lös.kurve von

$$\dot s = 1$$
$$\dot x = A(s)x + b(s)$$

$\Rightarrow$ (Satz 3, §9) $x(t)$ wird für $t \to \tilde{t}_+$ unbeschränkt, weil $(t, x(t))$ für $t \to \tilde{t}_+$ jedes Kompaktum von $D = I \times \mathbb{R}^n$ verlässt.

Andererseits: Sei $t_0 \in \tilde{I}$ und $x_0 = x(t_0)$, Seien $L = \max\{\|A(s)\| : t_0 \le s \le \tilde{t}_+\}$ und
$M = \max\{|b(s)| : t_0 \le s \le \tilde{t}_+\}$.

$\Rightarrow$ für $u(t) := |x(t)|$ gilt:

$$u(t) = u(0) + \left|\int_{t_0}^{t} \dot{x}(\tau)\,d\tau\right| \le u(0) + \int_{t_0}^{t} \left(\|A(s)\|\,|x(s)| + |b(s)|\right) ds$$

$$\le C + L\int_{t_0}^{t} u(s)\,ds$$

mit

$$C := |x_0| + \int_{t_0}^{\tilde{t}_+} |b(s)|\,ds. \quad \Rightarrow \text{(Gronwall)} \quad u(t) \le C e^{L\tilde{t}_+}$$

auf $[t_0, \tilde{t}_+)$, also beschränkt: ↯. Also doch $\tilde{t}_+ = t_+$.
Ähnlich sieht man: $t_- = \tilde{t}_-$, d.h. $I = \tilde{I}$.

☐

Kommentar: Sei $t_0 \in I$ fest. Definiert man $\varphi^t(x) = x(t)$, wo $t \mapsto x(t)$, $I \to \mathbb{R}^n$ die Lösungskurve mit $x(t_0) = x$ ist, so erhält man also eine Abbildung $\varphi : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(t, x) \mapsto \varphi^t(x)$. Man beachte, daß also die Abbildungen $\varphi^t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ allesamt denselben Definitionsbereich haben (i.a. Fall hängt dieser von t ab). Allerdings ist $\varphi = (\varphi^t)$ ~~be~~ wegen der Nicht-Autonomie kein Fluss mehr im bisherigen Sinne, weil i.a. nicht $\varphi^t \circ \varphi^s = \varphi^{t+s}$ gilt (für $t, s, t+s \in I$).

<u>SATZ 21.</u> Sei $A: I \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ eine C^1-Abbildung und $L_{(h)} \subseteq C^1(I;\mathbb{R}^n)$ die Menge aller maximalen Lösungen des homogenen Systems $\dot{x} = A(t)x$. Dann gilt: $L_{(h)}$ ist ein n-dimensionaler Unter-Vektorraum von $C^1(I;\mathbb{R}^n)$ Weiterhin ~~und es~~ Ist $t_0 \in I$ und ~~ist~~ sind $\xi_1,\dots,\xi_r \in \mathbb{R}^n$ und $x_1,\dots,x_r : I \to \mathbb{R}^n$ die Lösungen mit $x_j(t_0) = \xi_j$, so ~~gelte~~ ist äquivalent:

~~(a) $(x_1,\dots,x_r) \subseteq C^1(I;\mathbb{R}^n)$ $L_h \subseteq C^1(I;\mathbb{R}^n)$~~

(a) $(x_1(t),\dots,x_r(t)) \subseteq \mathbb{R}^n$ sind l.u. für jedes $t \in I$

(b) $(\xi_1,\dots,\xi_r) \subseteq \mathbb{R}^n$ ~~sind~~ ist l.u.

(c) $(x_1,\dots,x_r) \subseteq L_{(h)} \subseteq C^1(I;\mathbb{R}^n)$ ist l.u.

<u>Beweis.</u> Sind $x, y \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$ Lösungen von $\dot{x} = A(t)x$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so folgt unmittelbar: auch $x+y$, λx sind Lösungen $\Rightarrow$ $L_{(h)} \subseteq C^1(I;\mathbb{R}^n)$ ist linearer Unterraum.

Weiter: (a) $\Rightarrow$ (b) klar, weil $\xi_j = x_j(t_0)$ ist $(j = 1,\dots,r)$;
(b) $\Rightarrow$ (c) klar, denn ist $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r = 0$ (in $C^1(I;\mathbb{R}^n)$) $\Rightarrow$ (insbes.) $\lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_r \xi_r = (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r)(t_0) = 0$ (in $\mathbb{R}^n$). $\Rightarrow$ $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$, also $(x_1,\dots,x_r) \subseteq L_{(h)}$ l.u.;
(c) $\Rightarrow$ (a): ist $t_1 \in I$ beliebig und $\lambda_1 x_1(t_1) + \dots + \lambda_r x_r(t_1) = 0$
$\Rightarrow$ $t \mapsto \underbrace{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r}_{=:x}$ ist Lösg. von $\dot{x} = A(t)$ mit Anf.-wert $x(t_1) = 0$ (Eind. der Lösung) $\Rightarrow$ $x(t) = 0$ $\forall t \in I$ $\Rightarrow$ $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$ $\Rightarrow$ $(x_1(t_1),\dots,x_r(t_1)) \subseteq \mathbb{R}^n$ l.u.

Schließlich: $\dim L_{(h)} \geq n$, denn $(x_1,\dots,x_n) \subseteq C^1(I;\mathbb{R})$ ist l.u., wenn $(x_1(t_0),\dots,x_n(t_0)) \subseteq \mathbb{R}^n$ l.u. ist. Andererseits: ist $(x_1,\dots,x_r) \subseteq$ ~~$C^1(I;\mathbb{R}^n)$~~ $L_{(h)}$ l.u. $\Rightarrow$ $(x_1(t_0),\dots,x_r(t_0)) \subseteq \mathbb{R}^n$ l.u. $\Rightarrow$ $r \leq n$ $\Rightarrow$ $\dim L_{(h)} = n$.

$\square$

<u>DEFINITION</u>. Ist $A: I \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ eine $\mathcal{C}^L$ Abb., so nennt man ein Tupel $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}^n)$, welches eine Basis von $L_{(h)}$ ist, ein <u>Lösungs-Fundamentalsystem</u> von $\dot{x} = A(t)x$.

<u>KOROLLAR</u>. Ist $A: I \to \cancel{\mathbb{R}^n}$ $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ $\mathcal{C}^L$ Abb. und $t_0 \in I$, so sei $\varphi: I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \varphi^t(x)$ gegeben durch $\varphi^t(x) = x(t)$, wo $t \mapsto x(t)$ die Lösung von $\dot{x} = A(t)x$ mit $x(t_0) = x$ ist. Dann sind die Abbildung $\varphi^t: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \varphi^t(x)$ für jedes $t \in I$ lineare Isomorphismen von $\mathbb{R}^n$, $\varphi^t \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$.

Vorlesung am 21.1.98 (26)

<u>KOMMENTAR</u>: (a) Beschreibt man φ^t durch eine Matrix $\Phi(t)$ (z.B. bzgl. der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^n$), so ist also $t \mapsto \Phi(t)$, $I \to GL_n(\mathbb{R})$ eine Kurve in $GL_n(\mathbb{R})$ mit $\Phi(t_0) = \cancel{I_n}$ $\mathbb{1}_n$.
~~Umgekehrt kann taucht jede solche Kurve $\Phi: I \to GL_n(\mathbb{R})$ als Lösungskurve eines nicht autonomen~~

(b) Die Spalten $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ von Φ bilden ein Fundamentalsystem. Die ~~Matrix~~ Kurve $t \mapsto \Phi(t)$ ist selbst Lösung einer homogenen Dgl. auf $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, nämlich

$$\dot{\Phi} = A(t)\,\Phi,$$

nämlich zum Anfangswert $\Phi(t_0) = I_n$ und umgekehrt. (wenn etwa $\varphi_i(t_0) = e_i$ ist).

(c) ~~Deshalb~~ Es kann jede Kurve in $GL_n(\mathbb{R})$, $t \mapsto \Phi(t)$ als Fundamentalsystem eines Systems $\dot{x} = A(t)x$ auftauchen; man wähle nur $A(t) := \dot{\Phi}(t) \cdot \Phi^{-1}(t)$; insbesondere ist <u>keineswegs</u> i.a. $\Phi(t+s) = \Phi(t)\Phi(s)$.

Beweis: Sind $x, y : I \to \mathbb{R}^n$ Lösungen von $\dot{x} = A(t)x$ mit $x(t_0) = x_0$ und $y(t_0) = y_0$, so ist $\overset{z:=}{x+y} : I \to \mathbb{R}^n$ Lösg. von $\dot{x} = A(t)x$ mit Anfangswert $z(t_0) = x_0 + y_0$. Das zeigt: $\varphi^t(x_0 + y_0) = \varphi^t(x_0) + \varphi^t(y_0)$ $\forall t \in I$, $\forall x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$. Ähnlich sieht man $\varphi^t(\lambda x) = \lambda \varphi^t(x)$.

Ist $(\xi_1, \dots, \xi_n) \subseteq \mathbb{R}^n$ Basis, so ist nach Satz 2 auch $(\varphi^t(\xi_1), \dots, \varphi^t(\xi_n)) \subseteq \mathbb{R}^n$ Basis von $\mathbb{R}^n$ für alle $t \in I$; das zeigt: $\varphi^t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist linearer Automorphismus.

$\boxed{\text{Ш}}$

SATZ 3. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offen und $A : I \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, $b : I \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$-Abb. Mit $L_{(i)} \subseteq \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}^n)$ werde die Menge aller Lösungen der inhomogenen linearen Dgl.

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)$$

bezeichnet. Ist $L_{(h)} = \{x \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}^n) : \dot{x} = A(t)x\}$, so gilt:

(a) Ist $\psi : I \to \mathbb{R}^n$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Glg., so gilt:

$$L_{(i)} = \psi + L_{(h)}.$$

(b) (Variation der Konstanten) Sei $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ ein Fundamentalsystem der homogenen Glg., $\Phi : I \to GL_n(\mathbb{R})$. Dann gilt für $\psi : I \to \mathbb{R}^n$, $\psi(t) := \Phi(t)u(t)$ mit $u : I \to \mathbb{R}^n$,

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1} b(s)\, ds \qquad (t_0 \in I)$$

ist eine spezielle Lösung von $\dot{x} = A(t)x + b(t)$.

Beweis. (a) Ist ψ spezielle Lösg., so ist $\tilde{\psi}$ genau dann weitere spezielle Lösg., wenn $\varphi := \psi - \tilde{\psi}$ Lösg. der hom. Glg. ist, ~~dann~~ denn

$$\cancel{\varphi} \; \tilde{\psi}' = A(t)\tilde{\psi} + b(t) \iff \dot{\varphi} = (\psi - \tilde{\psi})' = \big(A(t)\psi + b(t)\big) - \big(A(t)\tilde{\psi} + b(t)\big)$$
$$= A(t)(\psi - \tilde{\psi}) = A(t)\varphi.$$

(b) Sei also $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ ein Fds. und $\psi(t) := \Phi(t)u(t)$ für eine vektorwertige Funktion $u: I \to \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$\dot{\psi} = \dot{\Phi}u + \Phi\dot{u} = (A(t)\Phi)u + \Phi\dot{u} = A(t)\psi + \Phi\dot{u}.$$

Also ist ψ genau dann Lösg. von $\dot{x} = A(t)x + b(t)$, wenn

$$\Phi\dot{u} = b(t) \iff \dot{u} = \Phi^{-1}(t)\, b(t),$$

also

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\, b(s)\, ds + \text{const.}$$

ist. ◻

KOMMENTAR. (a) Ist man in der Lage das homogene System $\dot{x} = A(t)x$ zu lösen (d.h. z.B. $\Phi: I \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ mit $\dot{\Phi} = A(t)\Phi$ und $\Phi(t_0) = I_n$ zu lösen), so besagt Satz 3, daß man dann auch das inhomogene System $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ vollständig lösen kann.

(b) Für die spezielle Lösung $\psi: I \to \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\psi(t) = \sum_{j=1}^{n} u_j(t)\varphi_j(t),$$

wo $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ ein Fds. der homogenen Glg. ist. Man betrachtet die Funktionen $u_j : I \to \mathbb{R}$ als "variierende Konstanten".

BEISPIEL. Betrachte
$$\dot{x} = 2tx + t^3 \qquad \text{auf } \mathbb{R},$$

also $a(t) = 2t$, $b(t) = t^3$. Dann ist
$$\varphi(t) = \exp\left(\int_0^t 2s\,ds\right) = e^{t^2}$$
eine Basis der Lösungen des homogen Systems $\dot{x} = 2t \cdot x$ und mit
$$u(t) = \int_0^t e^{-s^2} \cdot s^3\, ds = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(t^2+1)e^{-t^2}$$
(substituiere $s^2 = \tau$ und part. Integration), wird $\psi_0(t) = u(t)e^{t^2}$ eine spezielle Lösung,
$$\psi_0(t) = \frac{1}{2}e^{t^2} - \frac{1}{2}(t^2+1)$$

Die allgemeine Lösung also ist:
$$\psi(t) = \left(\frac{1}{2} + c\right)e^{t^2} - \frac{1}{2}(t^2+1) \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

KOMMENTAR. Außer im Fall $n=1$ kann man das System $\dot{x} = A(t)x$ i. a. nicht "durch Quadratur" lösen. Es ergeben sich nämlich als Lösungen durchaus "neue" Funktionen (d.h. nicht-elementare in dem Sinne, daß sie Verkettung bekannter Funktionen sind, und auch nicht Verkettung ihrer Inversen oder Stammfunktionen, selbst wenn $(a_{ij}(t))$ allesamt elementar sind

PROBLEM. Kann man eine explizite "Integration" wenigstens dann angeben, wenn A unabhängig von t ist, also $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ konstant,?

$$\dot{x} = Ax ?$$

mit $\Phi(0) = I_n$
und $\dot{\Phi} = A\Phi$

Beachte: In diesem Fall muß also ~~φ~~ $\Phi : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{R})$ ein Fluß sein, also

$$\Phi(t+s) = \Phi(t)\Phi(s)$$

für alle $t, s \in \mathbb{R}$.

Vorlesung am Montag, dem 26.1.98 (27).

BEISPIEL. Sei $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$; $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann wird $\dot{x} = Ax$ zu dem entkoppelten System

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x$$
$$\dot{x}_2 = \lambda_2 x$$

und hat also das Fundamental-System ~~A~~ (φ_1, φ_2) mit $\varphi_1(t) = (e^{\lambda_1 t}, 0)$ und $\varphi_2(t) = (0, e^{\lambda_2 t})$. ~~Der zugehörige Fluß~~ Es ist also hier

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}.$$

BEMERKUNG 2. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ und $S \in GL_n(\mathbb{R})$. Es ist dann $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $\dot{x} = Ax$ genau dann, wenn $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\psi(t) = S^{-1}\varphi(t)$ eine Lösung von $\dot{x} = Bx$ mit $B = S^{-1}AS$ ist.

Beweis. Es ist mit $\varphi = S\psi$ also $\dot{\varphi} = S\dot{\psi}$ (denn $\dot{S} = 0$). Also:

$$\dot{\varphi} = A\varphi \iff S\dot{\psi} = AS\psi \iff \dot{\psi} = (S^{-1}AS)\psi.$$

$\boxed{}$

(*)

SATZ 1. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ mit n verschiedenen reellen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Sei $\psi_1(t) = (e^{\lambda_1 t}, 0, \dots, 0), \dots, \psi_n(t) = (0, \dots, 0, e^{\lambda_n t})$, $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$. Dann existiert ein $S \in GL_n(\mathbb{R})$, so daß ~~$\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ mit~~ $\Phi = S\Psi_{S^{-1}}$ ein Folg. für $\dot{x} = Ax$ auf $\mathbb{R}^n$ ist.

Beweis. Sei $s_j \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ Eigenvektor für λ_j $(j = 1, \dots, n) \Rightarrow (s_1, \dots, s_n)$ ist Basis für $\mathbb{R}^n$ und für $S = (s_1, \dots, s_n) \in GL_n\mathbb{R}$ gilt: $B = S^{-1}AS = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \Rightarrow$ ~~(Bem. 2)~~ Ψ ist Folg. von $\dot{x} = Bx \Rightarrow$ (Bem. 2) $\Phi = S\Psi_{S^{-1}}$ ist Folg. von $\dot{x} = Ax$.

bis hier. $\boxed{}$

KOMMENTAR. (a) Um die Normalformentheorie von Matrizen über $\mathbb{C}$ benutzen zu können, behandelt man die Dgl. $\dot{x} = Ax$ auch über $\mathbb{C}^n$ statt $\mathbb{R}^n$ und schreibt

$$\dot{z} = Az, \qquad (z \in \mathbb{C}^n).$$

Die Menge aller Lösungen $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ bilden dann einen komplexen Unterraum der (komplexen) Dimension n in $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$.

Eine Basis $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ heißt dann ein komplexes Fundamental-System.

(b) Satz 1 hat dann die folgende komplexe Version: Hat $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ n verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ und ist $\Psi = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$, so existiert ein $S \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$, so daß $\Phi = S\Psi S^{-1}$ ein (kpxes) Folsg. von $\dot z = Az$ ist.

<u>BEMERKUNG 3.</u> Ist $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ und ist $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ ein komplexes Fundamentalsystem für $\dot z = Az$, so ist $(\mathrm{Re}(\varphi_1), \mathrm{Im}(\varphi_1), \dots, \mathrm{Re}(\varphi_n), \mathrm{Im}(\varphi_n))$ ein reelles Erzeugenden-System für $\dot x = Ax$.

<u>Beweis</u>: ~~Mit~~ Ist $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ eine komplexe Lösg. von $\dot z = Az$, so auch $\bar\varphi$, denn $\dot{\bar\varphi} = \overline{\dot\varphi} = \overline{A\varphi} = \bar A \cdot \bar\varphi = A\bar\varphi$, weil $A = \bar A$ ist. Deshalb ist auch $\mathrm{Re}(\varphi) = \frac{1}{2}(\varphi + \bar\varphi)$ und $\mathrm{Im}(\varphi) = \frac{1}{2i}(\varphi - \bar\varphi)$ Lösg. von $\dot x = Ax$. Ist nun $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ bel. reelle Lösung, so existieren $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{C}$: $x = \mu_1\varphi_1 + \dots + \mu_n\varphi_n$ ist. Setzt man $\mu_j =: a_j + ib_j$, so wird das zu

$$x = a_1 \mathrm{Re}(\varphi_1) - b_1 \mathrm{Im}(\varphi_1) \pm \dots + a_n \mathrm{Re}(\varphi_n) - b_n \mathrm{Im}(\varphi_n).$$

Also ist $(\mathrm{Re}(\varphi_1), \dots, \mathrm{Im}(\varphi_n))$ reelles Erzeugendensystem von $\dot x = Ax$. $\square$

<u>BEISPIEL</u>: Betrachte

$$\ddot x + \omega^2 x = 0 \qquad \text{(Schwingungsglg.)}$$

mit $\omega > 0$. Setzen wir $x_1 = x$ und $x_2 = \dot x$, so wird das zu

$\dot{x} = Ax$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$. Charakteristisches Polynom: $\chi_A = \det\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ +\omega^2 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \omega^2 \Rightarrow$ Eigenwerte: $\lambda_{1/2} = \pm i\omega$.
Eigenvektoren: für $i\omega$: $i\omega x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow s_1 = (1, +i\omega)$; für $-i\omega$: $s_2 = (1, -i\omega)$. $\Rightarrow B = S^{-1}AS = \operatorname{diag}(i\omega, -i\omega)$. $\Rightarrow$ Fols. von $\dot{z} = Bz$ ist

$$\Psi = \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Fols. für $\dot{z} = Az$ ist $\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ +i\omega & -i\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & e^{-i\omega t} \\ i\omega e^{i\omega t} & -i\omega e^{i\omega t} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ für $\varphi_1 = \begin{pmatrix} e^{i\omega t} \\ i\omega e^{i\omega t} \end{pmatrix}$ gilt $Re(\varphi_1) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) \end{pmatrix}$, $Im(\varphi_1) = \begin{pmatrix} \sin \omega t \\ \omega \cos \omega t \end{pmatrix}$

$(Re(\varphi_1), Im(\varphi_1))$ sind $\mathbb{R}$-l.u., denn

$$\det\begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t \end{pmatrix} = \omega \neq 0.$$

$\Rightarrow (\cos(\omega t), \sin(\omega t))$ ist Fols. für $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$.

Vorlesung am Mittwoch, dem 28.1.98 (28).

PROBLEM: Was macht man im allgemeinen Fall $\dot{z} = Az$?

Erinnere: Für jedes $A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ linear setzt man die Operator-Norm

$$\|A\| := \max\{|Az| : |z| \leq 1\}$$

(wo $|\cdot|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{C}^n$ ist, $|z|^2 = \sqrt{\langle z, \bar{z}\rangle} = \sum_{j=1}^n z_j \bar{z}_j$).

Es gilt:

Übung: vergleiche $\|A\|^2$ mit $\mathrm{tr}(\bar{A}^t A)$!

(i) $|Az| \leq \|A\| \cdot |z|$

(ii) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, insbesondere $\|A^m\| \leq \|A\|^m$ $\forall m \in \mathbb{N}$

zu (ii): für alle $|z| \leq 1$: $|ABz| \leq \|A\| \, |Bz| \leq \|A\| \, \|B\| \, |z| \leq \|A\| \, \|B\|$

$\Longrightarrow \|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$.

SATZ ~~4~~ 5. Für jedes $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

in $(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|)$ absolut.

KOMMENTAR. Absolute Konvergenz heißt, daß sogar die Reihe reeller Zahlen $\sum_{k=0}^{\infty} \|\frac{1}{k!} A^k\|$ konvergiert. Es folgt dann, daß $\left(\sum_{k=0}^{r} \frac{1}{k!} A^k\right)_{r \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ $(\cong \mathbb{R}^{2n^2})$ ist und also konvergiert (und auch jede Umordnung).

Beweis: Es ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|} < \infty,$$

also (nach Bolzano-Weierstraß) konvergent. ☐

DEFINITION. Man nennt $\exp : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

die (komplexe) Exponentialfunktion (auf Matrizen).

SATZ ~~5~~ 6. Sei $\exp : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ die Exponentialfunktion. Es gilt:

(a) Ist $S \in GL_n(\mathbb{C})$ und $B = S^{-1}AS$, so gilt:

$$\exp(B) = S^{-1}\exp(A)\, S$$

(b) Ist $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ mit $AB = BA$, so ist

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B).$$

(c) $\exp(0) = I$ und $\exp(-A) = \exp(A)^{-1}$, insbesondere ist $\exp(A) \in GL_n(\mathbb{C})$, für alle $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$.

LEMMA. Es konvergiere $\sum_{k=0}^{\infty} A_k = A$ und $\sum B_\ell = B$ absolut in $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. Dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k+\ell=n} A_k B_\ell\right) = C$ absolut und es ist $AB = C$.

Beweis. Sei $\alpha_n := \sum_{k=0}^{n} A_k$, $\beta_n := \sum_{\ell=0}^{n} B_\ell$ und $\gamma_n = \sum_{r=0}^{n}\left(\sum_{k+\ell=r} A_k B_\ell\right)$,

also $(\alpha_n) \to A$, $(\beta_n) \to B$, $(\gamma_n) \to C$. $\Rightarrow$ $(\alpha_n\beta_n) \to AB$. Es ist nun

$$\|\gamma_{2n} - \alpha_n\beta_n\| \le \sum{}' \|A_k\|\|B_\ell\| + \sum{}'' \|A_k\|\,\|B_\ell\|$$

wo $\sum'$ über (k,ℓ) mit $k+\ell \le 2n$ und $n+1 \le \ell \le 2n$
und $\sum''$ " " " " " $n+1 \le k \le 2n$ ist.

Aber $\sum' \|A_k\| \, \|B_\ell\| \le \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\|\right) \cdot \left(\sum_{\ell=n+1}^{2n} \|B_\ell\|\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$,

denn $\sum_0^\infty \|A_k\| < \infty$ und $\sum_0^\infty \|B_\ell\| < \infty$. Ähnlich sieht man $\sum'' \|A_k\| \, \|B_\ell\| \to$

$\boxed{\text{q}}$

Beweis von Satz ~~5~~ 6: (a) es ist $S^{-1}(A_1 + A_2) S = S^{-1} A_1 S + S^{-1} A_2 S$ und $S^{-1} A^k S = (S^{-1} A S)^k$, also ist

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (S^{-1} A S)^k = S^{-1} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k\right) \cdot S,$$

also für $n \to \infty$: $\exp(S^{-1} A S) = S^{-1} \exp(A) \, S$.

(b) Wegen $AB = BA$ ist $(A+B)^n = \sum_{k+\ell=n} \binom{n}{k} A^j B^k$.

Deshalb ist

$$\exp(A+B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A+B)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k+\ell=n} \frac{1}{k!\,\ell!} A^k B^\ell \right)$$

also nach dem Lemma

$$\exp(A+B) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k/k!\right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} B^\ell/\ell!\right) = \exp(A) \exp(B).$$

(c) Natürlich ist $\exp(0) = \mathbb{1}$ (nach Definition) und weil $A(-A) = -A \cdot A$ i ist nach (b)

$$I = \exp(0) = \exp(A - A) = \exp(A) \cdot \exp(-A)$$

$\Rightarrow \exp(A) \in GL_n(\mathbb{R})$ und $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

$\boxed{\text{q}}$

SATZ ~~6~~ 7. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ und $\Phi: \mathbb{R} \to \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ gegeben durch

$$\Phi(t) = \cancel{A^t}\, e^{tA}.$$

Dann gilt $\Phi(0) = I$ und $\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) = \Phi(t)A$ für alle $t \in \mathbb{R}$, d.h. Φ ist Fdl.-Lösg. von $\dot{z} = Az$.

Kommentar. (a) Es ist also ~~Φ~~ $\Phi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ Lösungs-Fdls. für $\dot{z} = Az$ (oder $\dot{x} = Ax$, wenn $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ ist) und das zu $\dot{z} = Az$ gehörende dynamische System $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ ist gegeben durch

$$\varphi^t(z) = e^{tA} \cdot z.$$

Beweis: $\Phi(0) = e^0 = I$ wie gesehen und

$$\frac{1}{h}\left(e^{(t+h)A} - e^{tA}\right) = \frac{1}{h}\left(e^{tA} \cdot e^{hA} - e^{tA}\right) = e^{tA}\left(\frac{e^{hA} - I}{h}\right)$$

nach Satz 5, 6. Es ist nun $\frac{1}{h}(e^{hA} - I) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} A^{k+1} \cdot h^k = f(h)$.

und daher – weil f stetig in $h = 0$ ist –

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(e^{(t+h)A} - e^{tA}\right) = e^{tA} \cdot f(0) = f(0)\, e^{tA} = e^{tA} \cdot A = A \cdot e^{tA},$$

denn $f(0) = A$.

$\boxtimes$

PROBLEM. Wie berechnet man e^A im konkreten Fall?

Vorlesung am Montag, den 9.2.98 (29)

DEFINITION. (a) Man nennt $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ *halbeinfach*, wenn es ein $\mathfrak{S} \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ gibt, so daß $\mathfrak{S}^{-1} M \mathfrak{S}$ diagonal ist.
(b) Man nennt $N \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ nilpotent, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $N^k = 0$ ist.

SATZ 8 (Chevalley – Jordan). Zu jedem $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ gibt es genau ein $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ halbeinfach und ein $N \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ nilpotent mit $A = N + S$, sowie $NS = SN$.

Beweis: Existenz: Man findet ein $\mathfrak{S} \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ so daß $B = \mathfrak{S}^{-1} A \mathfrak{S}$ erfüllt:

$$B = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{pmatrix}, \qquad \Rightarrow \Delta I = I \Delta \text{ und } B = \Delta + I.$$

wo $J_k = \mathrm{diag}(\lambda_k, \dots, \lambda_k) + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ $(k = 1, \dots, r)$ Jordanblöcke sind. Man setze $\Delta_k = \mathrm{diag}(\lambda_k, \dots, \lambda_k) = \lambda_k \mathbb{1}_k$ und $\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Delta_r \end{pmatrix}$, sowie $I_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ und $I = \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & \ddots & \\ & & I_r \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $M = \mathfrak{S} \Delta \mathfrak{S}^{-1}$ ist halbeinfach, $N = \mathfrak{S} I \mathfrak{S}^{-1}$ ist nilpotent und $MN = NM$ sowie $A = M + N$.
Eindeutigkeit (evtl. Übung).

(weil $M + N = S(\Delta + I) S^{-1} = A$)

(weil $MN = S\Delta S^{-1} \cdot S I S^{-1} = S(\Delta I) S^{-1} = \dots$) □

KOMMENTAR. Wegen Satz 5 ist zunächst $e^{tA} = e^{tM} \cdot e^{tN}$ und weil $\mathfrak{S}^{-1} \exp(A) \mathfrak{S} = \exp(\mathfrak{S}^{-1} A \mathfrak{S})$ ist, braucht man nur $e^{t\Delta}$ bzw. e^{tI} zu berechnen. Es ist aber $e^{t\Delta} = \begin{pmatrix} e^{t\Delta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{t\Delta_k} \end{pmatrix}$ und $e^{I} = \begin{pmatrix} e^{tI_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{tI_k} \end{pmatrix}$, d.h. man braucht nur $e^{t\Delta}$ und e^{tI} für $\Delta = \lambda \cdot \mathbb{1}_r$ und $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ zu berechnen. Offenbar ist

$$e^{t\Delta} = e^{\lambda t} E_r \quad \text{und} \quad e^{tI} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

(Übung!)

Wir haben also $\dot{x} = Ax$ mit $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ mit $\varphi^t(x) = \exp(tA)x$ explizit gelöst.

§11. Differenzierbare Abhängigkeit

Motivation. $D \subseteq \mathbb{R}^n$ sei Gebiet und $f: D \to \mathbb{R}^n$ ein $\mathcal{C}^1$-Vektorfeld. Sei $\varphi: \Omega \to D$ $(\Omega \subseteq \mathbb{R} \times D)$ der zugehörige Fluß von $\dot{x} = f(x)$,

$$(t, x) \longmapsto \varphi^t(x) = x(t).$$

Bisher ist nur bewiesen: $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times D$ ist offen und φ ist stetig. Noch zu beweisen: φ ist sogar eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung!
Wir wissen bereits: $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) = \dot{x}(t) = f(x(t)) = f(\varphi^t(x))$ existiert und ist stetig. Es bleibt also:

Frage: Existiert

$$D\varphi^t(x) := \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$$

und ist $\Omega \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, $(t, x) \longmapsto D\varphi^t(x)$ stetig? (Kurz: Hängen die Lösungen von $\dot{x} = f(x)$ differenzierbar von den Anfangswerten ab?)

DEFINITION. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet und auch $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Sei $f: D \times U \to \mathbb{R}^n$, $(x, \mu) \longmapsto f_\mu(x)$ eine $\mathcal{C}^1$-Abb. Man nennt f ein parameter-abhängiges Vektorfeld und

$$\dot{x} = f_\mu(x)$$

die zugehörige parameter-abhängige gew. Dgl.

BEMERKUNG 1. Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ Gebiete und $f : D \times U \to \mathbb{R}^n$ ein parameter-abhängiges C^1-Vektorfeld auf D. Ist $\Omega_\mu \subseteq \mathbb{R} \times D$ und $\varphi_\mu : \Omega_\mu \to D$ das zu $\dot{x} = f_\mu(x)$ gehörende dynamische System, so gilt: $\Omega := \{(t,x,\mu) \in \mathbb{R} \times D \times U : (t,x) \in \Omega_\mu\}$ ist offen und $\varphi : \Omega \to D$

$$\varphi(t,x,\mu) = \varphi_\mu^t(x)$$

ist stetig.

KOMMENTAR. Diese Bemerkung besagt insbesondere, daß die Lösungen von $\dot{x} = f_\mu(x)$ nicht nur stetig von den Anfangswerten, sondern auch stetig vom Parameter abhängen, d.h.: ist $(x_0, \mu_0) \in D \times U$ und $t_0 \in I_{\mu_0}(x_0)$, so ist $t_0 \in I_\mu(x_0)$ für alle μ aus einer Umgebung $U_0 \subseteq U$ von μ_0 und es ist

$$\lim_{\mu \to \mu_0} \varphi_\mu^{t_0}(x_0) = \varphi_{\mu_0}^{t_0}(x_0).$$

Beweis. Betrachte das Vektorfeld $g : D \times U \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ auf $D \times U$ gegeben durch $g(x,\mu) = (f_\mu(x), 0)$. Das zugehörige dynamische System von $\dot{z} = g(z)$, $z = (x,\mu)$, also

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_\mu(x) \\ \dot{\mu} &= 0 \end{aligned}$$

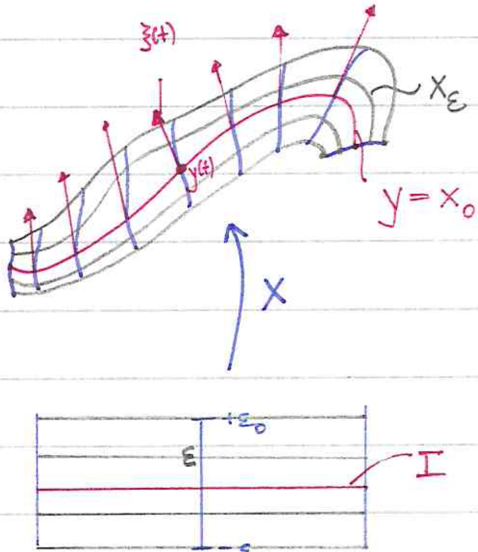
werde mit $\Phi : \Omega \to D \times U$ bezeichnet. Einerseits ist Ω offen und Φ stetig, andererseits ist

$$\Phi^t(x,\mu) = (\varphi^t_\mu(x), \mu).$$

Das zeigt: $\Omega = \{(t,x,\mu) : (t,x) \in \Omega_\mu\}$ und die Stetigkeit von $(t,x,\mu) \longmapsto \varphi^t_\mu(x)$.

$\square$

DEFINITION. (a) Sei $f: D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein $\mathcal{C}^1$-Vektorfeld auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $y: I \longrightarrow D$ eine Lösung von $\dot{x} = f(x)$. Eine Variation von Lösungen $(x_\varepsilon)_{-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0}$ um y ist eine $\mathcal{C}^2$ Abbildung



$$X: (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times I \longrightarrow D,$$

so daß $x_\varepsilon : I \to D$, $x_\varepsilon(t) = X(\varepsilon, t)$ eine Lösung von $\dot{x} = f(x)$ für jedes $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ist und $x_0 = y$.

(b) Ist $(x_\varepsilon)_\varepsilon$ eine Variation von Lösungen um $y = x_0 : I \to D$ von $\dot{x} = f(x)$, so nennt man $\xi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$\xi(t) := \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} x_\varepsilon(t)$$

das zugehörige Variations-Vektorfeld von (x_ε) längs y.

KOMMENTAR. Entwickelt man $(\varepsilon, t) \longmapsto x_\varepsilon(t)$ nach ε in einem ~~in einem~~ Punkt $x_0(t) = y(t)$ der Lösungskurve $t \longmapsto y(t)$ von $\dot{x} = f(x)$, so ist also

$$x_\varepsilon(t) = y(t) + \varepsilon \cdot \xi(t) + o(\varepsilon),$$

und man betrachtet daher $u_\varepsilon(t) := y(t) + \varepsilon \xi(t)$ als "Lösung" von $\dot{x} = f(x)$ in 1. Ordnung

BEMERKUNG 2. Sei $f: D \to \mathbb{R}^n$ C^1-Vektorfeld, $y: I \to \mathbb{R}$ Lösung von $\dot{x} = f(x)$ und (x_ε) eine (C^2) Variation von y mit Variations-Vektorfeld $\xi: I \to \mathbb{R}^n$. Ist $A: I \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, $t \longmapsto A(t) := Df(y(t))$, so löst ξ die (nicht-autonome) lineare Dgl.

$$\dot{\xi} = A(t)\,\xi$$

Beweis. Es ist

$$\dot{\xi}(t) = \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} x_\varepsilon(t) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \frac{d}{dt} x_\varepsilon(t) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} f(x_\varepsilon(t))$$

$$= Df(x_0(t)) \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} x_\varepsilon(t) = A(t)\,\xi,$$

wenn $(\varepsilon, t) \longmapsto x_\varepsilon(t)$ eine C^2-Variation von y ist.

$\square$

KOMMENTAR. (a) Die lineare Dgl.

$$\dot{\xi} = Df(y(t)) \cdot \xi$$

wird als Variationsgleichung von $\dot{x} = f(x)$ entlang der Lösung $y(t)$ (oder auch als Linearisierung von $\dot{x} = f(x)$ in y) bezeichnet. Ist insbesondere $y(t) = y_0$ eine Gleichgewichtslösung von $\dot{x} = f(x)$, also $f(y_0) = 0$, und $A := Df(y_0)$, so ist die Variationsgleichung die autonome lineare Dgl.

$$\dot{\xi} = A\xi .$$

Man erhofft sich das qualitative Verh. der Lösungen in der Nähe der (bekannten) Lösung $t \mapsto y(t)$ durch die Lösungen $t \mapsto \xi(t)$ von $\dot{\xi} = A(t)\xi$ mit $\xi(0)$ nahe bei $\xi_0 = 0$ beschreiben zu können.

bis hier?

Vorlesung am Mittwoch, dem 4.2.98 (30)

SATZ (Differenzierbare Abhängigkeit von den Anfangswerten). Sei $f : D \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld und $y_0 \in D$. Sei $I = I(y_0)$ und $y : I \to D$ Lösung von $\dot{x} = f(x)$ mit $y(0) = y_0$. Sei weiterhin $\Phi : I \to GL_n(\mathbb{R})$, $t \mapsto \Phi(t)$ die Fundamentallösung des in y linearisierten Systems

$$\dot{\xi} = Df(y(t))\,\xi$$

mit $\Phi(0) = E_n$. Dann gilt für den Fluß $\varphi : \Omega \to D$ von $\dot{x} = f(x)$:

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{1}{|\xi|} \{ \varphi^t(y_0+\xi) - \varphi^t(y_0) - \Phi(t)\xi \} = 0.$$

KOROLLAR 1. Ist $f: D \to \mathbb{R}^n$ ein $\mathcal{C}^1$-Vektorfeld und $\varphi: \Omega \to D$ der zugehörige Fluß, so ist auch φ eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung.

Beweis. Der Satz zeigt zunächst, daß $D\varphi^t(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,x) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ existiert und

$$D\varphi^t(x) = \Phi(t;x)$$

ist. Ist $t \mapsto y(t)$ die Lösung von $\dot{x} = f(x)$ mit $y(0) = x$, so ist hierbei $t \mapsto \Phi(t;x)$ die Fundamental-Lösung von

$$\dot{\xi} = A(t;x)\xi$$

der Variationsgleichung entlang y, also Lösung von

$$\dot{\Phi} = A(t;x)\Phi$$

in $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ mit $\Phi(0) = E_n$. Nach Bemerkung 1 ist aber $(t,x) \mapsto \Phi(t,x)$ auch stetig in (t,x) (fasse Φ als Variable und x als Parameter auf). Also ist $(t,x) \longmapsto D\varphi^t(x)$ stetig.

Weil $(t,x) \longmapsto \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x) = f \circ \varphi_t(x)$ sowieso stetig ist, hat man: φ ist eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung.

$\square$

KOMMENTAR. Daß $t \mapsto D\varphi^t(x)$ die lineare Dgl.

$$\dot{\Phi} = A(t)\Phi$$

mit $A(t) = Df(\varphi^t(x))$ (und $\Phi(0) = E_n$) löst, kann man sich leicht durch folgende Rechnung merken (wenn man schon weiß, daß $(t, x) \mapsto \varphi^t(x)$ sogar C^2 ist, wenn f es ist):

$$\frac{d}{dt} D\varphi^t(x) = D\left(\frac{d}{dt}\varphi^t(x)\right) = D\left(f \circ \varphi^t(x)\right)$$

$$= Df(\varphi^t(x)) \cdot D\varphi^t(x) = A(t)\, D\varphi^t(x).$$

Beweis des Satzes. Sei also $y_0 \in D$ und $t_0 \in I(y_0)$ fest. O.E.: $t_0 > 0$
Für $\xi \in \mathbb{R}^n$ so klein, daß $y_0 + \xi \in D$ und $t_+(y_0+\xi) > t_0$ ist nun für $0 \le t \le t_0$:

$$\varphi^t(y_0) = y(t) = y_0 + \int_0^t f(\varphi^s(y_0))\, ds$$

$$\varphi^t(y_0+\xi) = (y_0+\xi) + \int_0^t f(\varphi^s(y_0+\xi))\, ds$$

$$\xi(t) := \Phi(t)\xi = \xi + \int_0^t Df(\varphi^s(y_0)) \cdot \xi(s)\, ds,$$

denn $t \mapsto \varphi^t(y_0)$ und $t \mapsto \varphi^t(y_0+\xi)$ lösen $\dot{x} = f(x)$, während $t \mapsto \xi(t)$ eben $\dot{\xi} = A(t)\xi$ mit $A(t) = Df(\varphi^t(y_0))$ löst.

Setze nun $g_\xi : [0, t_0] \longrightarrow \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$

$$g_\xi(t) := |\varphi^t(y_0+\xi) - \varphi^t(y_0) - \xi(t)|$$

z.z.: $\lim\limits_{\xi \to 0} \frac{g_\xi(t)}{|\xi|} = 0.$ (sogar gleichmäßig ~~in~~ auf $[0, t_0]$).

Es ist nun:

$$g(t) \le \int_0^1 | f(\varphi^s(y_0+\xi)) - f(\varphi^s(y_0)) - Df(\varphi^s(y_0)) \cdot \xi(s) | \, ds.$$

Weil f eine C^1-Abbildung ist, gilt für alle $z, z_0 \in D$:

$$f(z) = f(z_0) + Df(z_0)(z - z_0) + R(z_0; z)$$

mit

$$\lim_{z \to z_0} \frac{R(z_0; z)}{|z - z_0|} = 0$$

(sogar gleichmäßig in z_0, wenn z_0 nur aus einem Kompaktum in D kommt). Mit $z_0 = \varphi^s(y_0)$, $z := \varphi^s(y_0 + \xi)$ $(0 \le s \le t_0)$ ist also:

$$|f(z) - f(z_0) - Df(z_0) \cdot \xi(s)| = |Df(z_0)\{(z - z_0) - \xi(s)\} + R(z_0; z)|$$

$$\le \|Df(z_0)\| \cdot g(s) + |R(z_0; z)|$$

Setze nun $M := \max\{\|Df(\varphi^s(y_0))\| : 0 \le s \le t_0\}$. ~~und~~ für $\varepsilon > 0$ beliebig; nun, wähle $\delta_1 > 0$ so klein, daß für alle $0 \le s \le t_0$ und alle z mit $|z - \varphi^s(y_0)| < \delta_1$ gilt:

$$|R(\varphi^s(y_0); z)| < \varepsilon |z - \varphi^s(y_0)|$$

Nach Satz 4, §9 existiert nun ein $\delta_2 > 0$ und ein $L > 0$, so daß für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$

mit $|\xi| < \delta_2$ gilt:

$$|\varphi^s(y_0+\xi) - \varphi^s(y_0)| \leq |\xi| e^{Ls}$$

und $\delta_2 e^{Lt_0} < \delta_1$. Für alle $0 \leq s \leq t_0$ und für alle ξ mit $|\xi| < \delta_2$ ist deshalb:

$$|R(\varphi^s(y_0); \varphi^s(y_0+\xi))| < \varepsilon |\varphi^s(y_0+\xi) - \varphi^s(y_0)| < \varepsilon |\xi| e^{Ls}$$

Also ist:

$$g_\xi(t) \leq \int_0^t \varepsilon |\xi| e^{Ls} ds + M \int_0^t g(s) ds$$

$$= \varepsilon C |\xi| + M \int_0^t g(s) ds$$

mit $C := \frac{1}{L}(e^{Lt_0} - 1)$. Mit Gronwalls Lemma ist also:

$$g_\xi(t) \leq \varepsilon C |\xi| e^{Mt_0} \qquad \forall \xi \in B_{\delta_2}(0), \ \delta_2 = \delta_2(\varepsilon)$$

$\Longrightarrow$

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{g_\xi(t)}{|\xi|} = 0 \quad \text{(gleichmäßig auf } [0, t_0]).$$

$\square$

KOROLLAR 2. Sei $f: D \to \mathbb{R}^n$ ein $\mathcal{C}^r$-Vektorfeld, $1 \leq r \leq \infty$. Dann ist der zugehörige Fluß $\varphi: \Omega \to D$ auch eine $\mathcal{C}^r$-Abbildung.

Beweis. Es reicht das für $1 \leq r < \infty$ zu beweisen.
Induktionsanfang: $r = 1$ (Satz).

Ind.-schritt: $r \longrightarrow r+1$.

Wende Ind.-voraussetzung auf das dynamische System ψ des Vektorfeldes $g: D \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$g(x, \xi) := \left(f(x), Df(x)\xi \right)$$

an, also mit $z := (x, \xi)$ auf $\dot{z} = g(z)$ oder

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ \dot{\xi} &= Df(x)\xi . \end{aligned}$$

Nach Ind.-voraussetzung ist nun ψ eine C^r-Abbildung. Andererseits ist

$$\psi^t(x, \xi) = (\varphi^t(x), D\varphi^t(x)\xi),$$

denn $t \longmapsto D\varphi^t(x)$ ist ja Lösung der Variationsgleichung $\dot{\xi} = A(t)\xi$ mit $A(t) = Df(\varphi^t(x))$. Insbesondere ist $(t,x) \longmapsto D\varphi^t(x)$ eine C^r-Abb. Weil $(t,x) \longmapsto \varphi^t(x)$ schon C^r ist, ist auch $(t,x) \longmapsto \frac{\partial}{\partial t}\varphi^t(x) = f \circ \varphi^t(x)$ eine C^r-Abb. Also ist (t,x) $\longmapsto$ sogar C^{r+1} Abb.

$\boxed{}$

(gewisser Abschluß der elementaren Theorie ist hier erreicht.)

§12. Qualitative Theorie

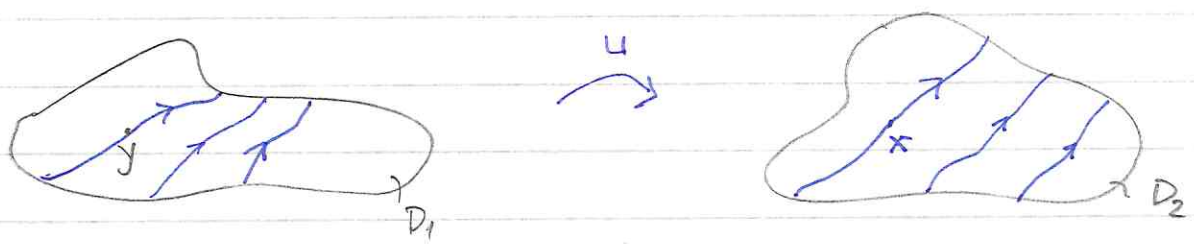
Im allgemeinen kann man keineswegs eine gew. Dgl. $\dot{x} = f(x)$, ($f: D \to \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$) explizit integrieren. Deshalb fragt man "nur" qualitativ nach dem Langzeitverhalten der Lösungen, z.B.:

- für welche Punkte $x \in D$ ist $t_\pm(x) = \pm\infty$?
- nähert sich $x(t)$ für $t \to \infty$ einem Fixpunkt, einer periodischen Bahn, oder liegt $\{x(t) : t \in (0,\infty)\} \subseteq D$ z.B. dicht?
- welche Gleichgewichtslagen sind stabil?

DEFINITION. Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiete, $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R} \times D_1$, $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R} \times D_2$ und $\psi: \Omega_1 \to D_1$ bzw. $\varphi: \Omega_2 \to D_2$ dynamische Systeme auf D_1 bzw. D_2. Es heißen dann φ und ψ äquivalent, wenn es einen Diffeomorphismus $u: D_1 \to D_2$ gibt, so daß für alle $y \in D_1$ gilt: $(t, y) \in \Omega_1 \Leftrightarrow (t, u(y)) \in \Omega_2$ und

$$u \circ \psi^t(y) = \varphi^t \circ u(y)$$

für alle $t \in I(y)$.



(Proposition)

BEMERKUNG 1. Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiete und $g: D_1 \to \mathbb{R}^n$ sowie $f: D_2 \to \mathbb{R}^n$ glatte Vektorfelder. Sind $\psi: \Omega_1 \to D_1$ und $\varphi: \Omega_2 \to D_2$ die zugehörigen dynamischen Systeme, so gilt: ψ und φ sind äquivalent vermöge $u: D_1 \to D_2$ genau wenn

$$(*) \qquad g(y) = (Du(y))^{-1} \cdot f(u(y))$$

1) →

Beweis. „$\Rightarrow$": Ist $u \circ \psi^t(y) = \varphi^t \circ u(y)$ $\forall t \in I(y)$, so ist

$$f \circ u(y) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi^t(u(y)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} u \circ \psi^t(y) = Du(y) \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \psi^t(y)$$

$$= Du(y)\, g(y),$$

also

$$g(y) = Du(y)^{-1} f \circ u(y) ;$$

„$\Leftarrow$": Ist $g = (Du)^{-1}(f \circ u)$, so setze $\tilde{\psi}^t(y) := u^{-1} \circ \varphi^t \circ u(y)$ $\forall t \in I(u(y))$. Dann ist $\tilde{\psi}^0 = id_{D_1}$ und $\tilde{\psi}^t \circ \tilde{\psi}^s = \tilde{\psi}^{t+s}$, also $\tilde{\psi}$ ein dynamisches System. $\tilde{\psi}$ ist auch maximal, weil φ es ist. Außerdem:

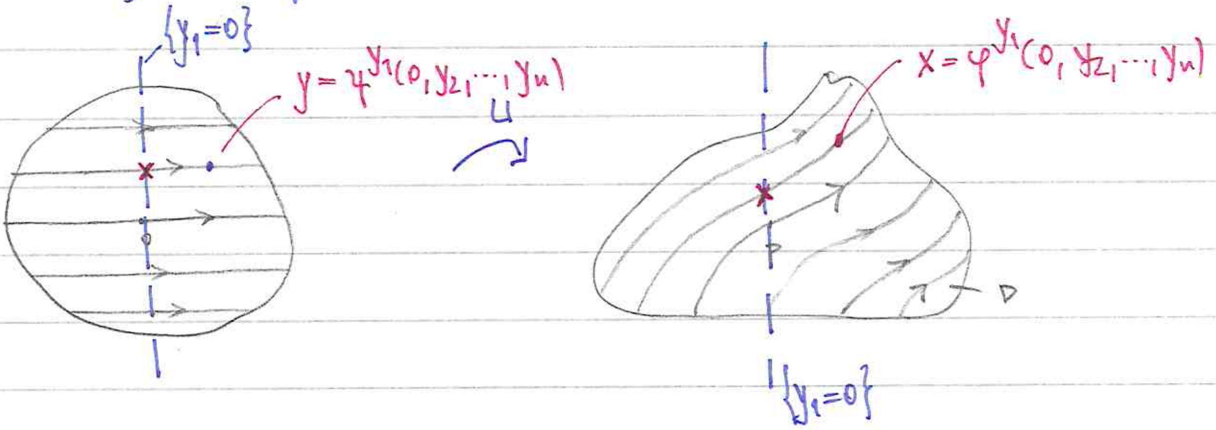
$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \tilde{\psi}^t(y) = (Du^{-1})(u(y)) \cdot \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(\varphi^t(u(y))\right) = Du(y)^{-1} f(u(y)) = g(y),$$

also ist $\tilde{\psi} = \psi$. Also: φ und ψ sind äquivalent.

$\blacksquare$

SATZ 11. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f: D \to \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld. Sei $p \in D$ und $f(p) \neq 0$. Ist nun $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch $g(y) = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, so gilt: es existieren Umgebungen $D_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ von $q = 0$ und $D_2 \subseteq D$ von p, so daß

$g|D_1$ und $f|D_2$ äquivalent sind.



KOMMENTAR. Der Fluß (ψ^t) zu $\dot y = g(y)$ ist natürlich durch

$$\psi^t(y) = (y_1+t, y_2, \dots, y_n)$$

gegeben. Der Satz stellt somit eine lokale Normalform für alle dynamischen Systeme in einer Umgebung eines nicht-singulären Punktes (d.h. einer "Nicht-Gleichgewichtslage") dar.

Beweis. O.E. sei $p=0$ und $f_1(p)\neq 0$. Idee: Man setzt $u|H := \mathrm{id}_H$, wo $H=\{y : y_1=0\}$ ist und folgt dann dem Fluß, präziser:

$$u(y_1, y_2, \dots, y_n) = \varphi^{y_1}(0, y_2, \dots, y_n)$$

Wähle $\delta>0$ so klein, daß $\varphi^t(x)$ für alle $t\in\mathbb{R}$ mit $|t|<\delta$ und allen $x\in D$ mit $|x|<\delta$ definiert ist, also $u: B_\delta(0)\to\mathbb{R}^n$. Nach Definition ist nun:

$$\varphi^t\circ u(y) = \varphi^t\circ\varphi^{y_1}(0,y_2,\dots,y_n) = \varphi^{t+y_1}(0,y_2,\dots,y_n) = u(t+y_1,y_2,\dots,y_n)$$
$$= u\circ\psi^t(y) \quad \forall t\in I(u(y)).$$

Außerdem ist:

$$\frac{\partial u}{\partial y_1}(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi^t(0,\dots,0) = f(0).$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial y_k}(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi^0(te_k) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (te_k) = e_k,$$

also ist

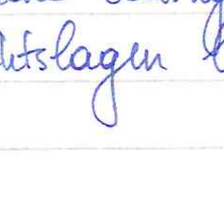
$$Du(0) = \left(\begin{array}{c|c} f_1(p) & 0 \\ \vdots & \\ f_n(p) & \mathbb{1}_{n-1} \end{array}\right),$$

also $\det Du(0) = f_1(p) \neq 0$. Also gibt es Umgebungen $D_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ von $q=0$ und $D_2 \subseteq D$ von $p=0$, so dass $u(D_1)=D_2$ und $u|D_1 : D_1 \longrightarrow D_2$ ein Diffeomorphismus ist. Also sind g und f lokal um $q=0$ und p tatsächlich äquivalent.

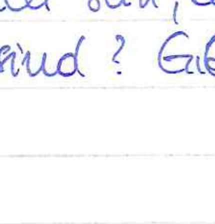
∎

FRAGE. Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit zwei Gleichgewichtslagen lokal äquivalent sind? Gibt es "Invarianten"?

Beispiel. $q=0$ von $\dot{x} = x$ kann lokal nicht äquivalent zu $p=0$ von $\dot{x} = -x$ sein:



"Quelle"
$\dot{x} = x$



„Senke"
$\dot{x} = -x$

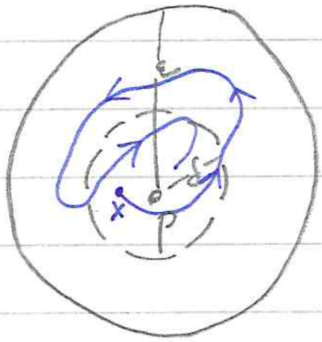
DEFINITION. Sei $f: D \to \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld und $p \in D$ ein singulärer Punkt von f, d.h. $f(p) = 0$.

(a) p heißt *stabil*, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß für alle $x \in D$ mit $|x - p| < \delta$ gilt: $t_+(x) = \infty$ und

$$|x(t) - p| < \varepsilon \quad \forall t > 0.$$

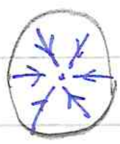
(b) p heißt *asymptotisch stabil* (oder ein *Attraktor*), wenn p stabil ist und es ein $\delta > 0$ gibt, so daß für alle $x \in B_\delta(p)$ gilt:

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = p.$$



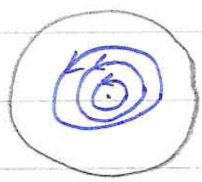
BEISPIEL. $D = \mathbb{R}^2$

(a) $p = 0$ ist Attraktor von $\dot{x} = -x$

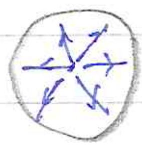


(b) $p = 0$ ist stabil, aber nicht Attraktor von

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1$$



(c) $p = 0$ ist nicht stabil für $\dot{x} = x$



KOMMENTAR. Die Eigenschaften Stabilität bzw. asymptotische Stabilität bleiben unter Äquivalenz erhalten.

DEFINITION. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f: D \to \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld und $p \in D$ ein singulärer Punkt, $f(p) = 0$. Ist $A = Df(p) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, so heißen die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ von A die charakteristischen Exponenten von p.

KOMMENTAR. Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ und $0 \neq \xi_0 \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor von λ, so gilt für die Lösung ~~von~~ $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, $t \mapsto \xi(t)$ zum Anfang $\xi(0) = \xi_0$ von $\dot{\xi} = A\xi$, daß

$$\xi(t) = e^{tA}\xi_0 = e^{\lambda t}\xi_0,$$

denn $e^{tA}\xi_0 = \sum_0^\infty \frac{1}{n!}(tA)^n \xi_0 = \sum_0^\infty \frac{1}{n!}(t\lambda)^n \xi_0 = e^{\lambda t}\xi_0$. Daher der Name "charakteristischer Exponent".

BEMERKUNG 2. Sei $q \in D_1$ ein singulärer Punkt des Vektorfeldes $g: D_1 \to \mathbb{R}^n$ und $p \in D_2$ ein singulärer Punkt von $f: D_2 \to \mathbb{R}^n$. Sind f und g lokal um p und q äquivalent, so müssen die charakteristischen Exponenten von f in p und g in q übereinstimmen.

Beweis. Nach Verkleinerung von D_1 und D_2 dürfen wir annehmen, daß f und g äquivalent vermöge einem $u: D_1 \to D_2$ mit $u(q) = p$ ist, also

$$g(y) = Du(y)^{-1} \cdot f(u(y)).$$

Sei $(a_j^i(y))_{ij} = (Du(y))^{-1}$. Dann ist:

$$\frac{\partial g^i}{\partial y^k}(q) = \frac{\partial}{\partial y^k}\Big(\sum_j a^i_j(y)\cdot f^j(u(y))\Big)\Big|_{y=q}$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial a^i_j}{\partial y^k}(q)\cdot \underbrace{f^j(p)}_{=0} + a^i_j(q)\frac{\partial}{\partial y^k}(f^j\circ u)(q)$$

$$= \sum_{j,\ell=1}^n a^i_j(q)\,\frac{\partial f^j}{\partial y^\ell}(p)\cdot\frac{\partial u^\ell}{\partial y^k}(q),$$

also ist

$$Dg(q) = S^{-1}\cdot Df(p)\cdot S$$

mit $S = Du(q)$. Also haben $Dg(q)$ und $Df(p)$ die gleichen Eigenwerte.

$\boxed{\text{Ц}}$

Kommentar. Der Beweis zeigt, daß sogar die Konjugationsklasse von $A = Df(p) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ in $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ eine Invariante unter Äquivalenz ist.

BEMERKUNG 3. Ist $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ und $\xi_0 = 0$ ein Attraktor für $\dot\xi = A\xi$, so gilt für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A: $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$.

Beweis. Sei $\delta > 0$ so klein, daß $\eta(t) \longrightarrow 0$ für $\eta \in \mathbb{R}^n$ mit $|\eta| < \delta$. Ist nun $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, so wähle einen Eigenvektor $\xi_0 \in \mathbb{C}^n$ mit $|\xi_0| < \delta$.

Es ist dann $\xi(t) = e^{tA}\xi_0 = e^{\lambda t}\xi_0$,
also

$$|\xi(t)| = |e^{Re(\lambda)t + i\,Im(\lambda)t}| \cdot |\xi_0| = e^{Re(\lambda)t} \cdot |\xi_0|.$$

Weil nun $t \mapsto Re(\xi(t))$ und $t \mapsto Im(\xi(t))$ Lösungen von $\dot{\xi} = A\xi$ auf $\mathbb{R}^n$ mit Anfang $Re(\xi_0)$ bzw $Im(\xi_0)$ ist, gilt: $Re(\xi(t)) \to 0$ und $Im(\xi(t)) \to 0$ für $t \to \infty$. Also ist

$$Re(\lambda) < 0.$$

$\boxed{\text{W}}$

Erinnere: Je zwei Normen auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V sind äquivalent, d.h.: sind $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 : \cancel{\mathbb{R}^n}\, V \to [0,\infty)$ Normen, so existieren Konstanten $c, C > 0$, so daß für alle $\xi \in \cancel{\mathbb{R}^n}\, V$ gilt:

$$c\,|\xi|_1 < |\xi|_2 < C\,|\xi|_1$$

~~Insbesondere: ist $t \mapsto \xi(t)$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ Kurve, so gilt: $|\xi(t)|_1 \to 0$~~

DEFINITION. Sei V ein endlich-dimensionaler (reeller oder komplexer) Vektorraum. (a) Ist $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V, so definiert man die zugehörige $|\cdot|_B$ auf V durch

$$|\xi|_B^2 := |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2, \text{ wenn } \xi = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \text{ ist}$$

(b) Ist $A \in Hom(V,V)$, so definiert man die zugehörige

Operatornorm $\|\cdot\|_B$ auf Hom(V,V) durch

$$\|A\|_B = \max\{|A\xi|_B : |\xi|_B \le 1\},$$

wo $|\cdot|_B$ die zugehörige Norm auf V ist.

Kommentar: (a) Ist ~~B~~ $B=(v_1,\dots,v_n)$ eine Basis von $\mathbb{C}^n$ und $S:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ der Koordinatenwechsel $e_j \mapsto v_j$ $(j=1,\dots,n)$, so ist also

$$|\xi|_B = |S^{-1}\xi|_{std},$$

wo $|\cdot|_{std}$ die Standard-Norm auf $\mathbb{C}^n$ ist.

→ (b)

LEMMA. Sei $B=(v_1,\dots,v_n)$ eine Basis von $\mathbb{C}^n$ und $|\cdot|_B$ bzw. $\|\cdot\|_B$ die zugehörigen Normen auf $\mathbb{C}^n$ bzw. $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. Sei ~~Ist~~ nun $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ und $\beta \in \mathbb{R}$, so daß für alle $\xi \in \mathbb{C}^n$ gilt:

$$\mathrm{Re}\,\langle \xi, A\xi\rangle_B \le \beta|\xi|_B^2$$

Dann ist:

$$\|e^{tA}\|_B \le e^{\beta t} \quad \text{für alle } t > 0.$$

Beweis. Es ist

$$\frac{d}{dt}|\xi(t)|_B^2 = \langle \dot{\xi}, \xi\rangle_B(t) + \langle \xi, \dot{\xi}\rangle_B(t)$$

$$= \langle A\xi, \xi\rangle(t) + \langle \xi, A\xi\rangle(t) = (\overline{\langle \xi, A\xi\rangle} + \langle \xi, A\xi\rangle)(t)$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\langle \xi, A\xi\rangle(t) \leq 2\beta\, |\xi(t)|_B^2$$

Mit $u(t) := |\xi(t)|_B^2$ und Integration gilt also:

$$u(t) \leq u(0) + 2\beta \int_0^t u(s)\,ds \qquad \forall t > 0$$

$\Rightarrow$ (Gronwall) $\quad u(t) \leq u(0)\, e^{2\beta t}$,

also:

$$|\xi(t)|_B^2 \leq |\xi|^2 e^{2\beta t},$$

also

$$|e^{At}\xi|_B^2 \leq |\xi|^2 e^{2\beta t} \Longrightarrow \|e^{tA}\|_B \leq e^{\beta t} \quad \forall t > 0.$$

$\boxed{\text{ü}}$

<u>SATZ 3.</u> Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ und für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A gelte: $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$. Dann ist $\xi_0 = 0$ ein Attraktor für $\dot{\xi} = A\xi$ auf $\mathbb{C}^n$.

<u>Beweis.</u> Für jedes $\xi \in \mathbb{C}^n$ ist die Lösung $t \mapsto \xi(t)$, $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ von $\dot{\xi} = A\xi$ gegeben durch $\xi(t) = e^{tA}\xi$. Für jede Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ von $\mathbb{C}^n$ ist daher

$$|\xi(t)|_B \leq \|e^{tA}\|_B \cdot |\xi|_B$$

z.z.: $\|e^{tA}\|_B \to 0$ für $t \to \infty$ für ein geeignetes B.

Wähle zunächst ein $S \in Gl_n(\mathbb{C})$, so daß

$$B := S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & b_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = D + N$$

mit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und $N = (b_{ij})$ ($b_{ij} = 0$ für $i \geq j$).

Nun mache weitere Koordinatentransformation $T = \mathrm{diag}(1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{n-1})$ mit $\varepsilon > 0$. Für $C = T^{-1}BT$ gilt dann

$$C = \mathrm{diag}(1, \varepsilon^{-1}, \dots, \varepsilon^{-n+1}) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & \varepsilon b_{12} & \cdots & \varepsilon^n b_{1n} \\ & \varepsilon\lambda_2 & & \vdots \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon^n \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \varepsilon b_{12} & \cdots & \varepsilon^n b_{1n} \\ & \lambda_2 & \varepsilon b_{23} \cdots & \\ & & \ddots & \varepsilon b_{n-1,n} \\ & & & \lambda \end{pmatrix} = D + \varepsilon \tilde{N}$$

$\Longrightarrow$

$$\mathrm{Re}\langle \eta, C\eta \rangle \leq \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Re}(\lambda_j) |\eta_j|^2 + \varepsilon L \cdot |\eta|^2$$

für ein $L = L(\tilde{N}) > 0$. Ist nun $\mathrm{Re}(\lambda_j) \leq \alpha$ für ein $\alpha < 0$, so ist:

$$\mathrm{Re}\langle \eta, C\eta \rangle \leq (\alpha + \varepsilon L) |\eta|^2$$

Sei nun $\mathcal{B}$ die Basis, die durch den Koordinatenwechsel ST gegeben ist, also $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\mathcal{B}} = \langle (ST)^{-1}\xi_1, (ST)^{-1}\xi_2 \rangle$ und $|\xi|^2_{\mathcal{B}} = |(ST)^{-1}\xi|^2$. Dann ist

$$\langle \eta, C\eta \rangle = \langle \eta, (ST)^{-1}A(ST) \rangle = \langle (ST)^{-1}\xi, (ST)^{-1}A\xi \rangle$$

für $\xi = ST(\eta)$, also $\langle \eta, C\eta \rangle = \langle \xi, A\xi \rangle_B$ und $|\eta|^2 = |\xi|^2_B$. Deshalb ist:

$$\mathrm{Re}\,\langle \xi, A\xi \rangle_B \le \beta \cdot |\xi|^2_B \qquad \forall \xi \in \mathbb{C}^n.$$

Wählt man nun $\varepsilon > 0$ so klein, daß $\beta := \alpha + \varepsilon L < 0$ ist, so gilt mit dem Lemma

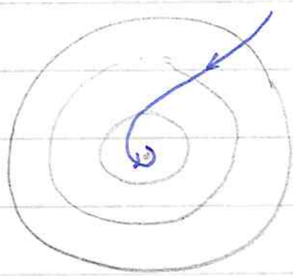
$$\| e^{tA} \|_B \le e^{\beta t} \longrightarrow 0$$

für $t \to \infty$. Also ist $\xi_0 = 0$ ein Attraktor. $\square$

vielleicht erst hier

KOMMENTAR (b) $t \mapsto \| e^{tA} \|_B$ strebt i.a. nicht monoton gegen 0. Könnte man eine Norm $|\ |_A$ auf $\mathbb{C}^n$ finden, so daß $t \longmapsto |\xi(t)|$ sogar monoton gegen 0 strebt, so wären die Kugeln $\{\xi \in \mathbb{C}^n : |\xi|_A < r\} =: B(r)$, $r > 0$ sogar strömungsinvariant, d.h.: ist $\xi \in B(r)$, so ist $\xi(t) \in B(r)\ \forall t > 0$.

(a) Ist $p \in D$ ein singulärer Punkt eines Vektorfeldes $f: D \to \mathbb{R}^n$, so nennt man p eine Senke, wenn für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von $A := Df(p)$ gilt: $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$. Satz 3 zusammen mit Bemerkung 3 lautet dann: für ein lineares System $\dot{\xi} = A\xi$ ist $\xi_0 = 0$ genau dann ein Attraktor, wenn $\xi_0 = 0$ eine Senke ist.



DEFINITION. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ und für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A gelte $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$. Die Liapunov-Norm $|\cdot|_A : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ zu A wird definiert durch

$$|\xi|_A^2 := \int_0^\infty |e^{tA}\xi|^2 \, dt .$$

Kommentar: (a) ~~Weil $t \mapsto e^{tA}\xi = \xi(t)$ die Lösungskurve von $\dot{\xi} = A\xi$ zum Anfang ξ ist, mißt man mit $|\xi|_A^2$ die Energie der Lösungskurve~~

$$\cancel{|\xi|_A^2 = \int_0^\infty |\xi(s)|}$$

(a) Nur weil $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ ist für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A, ist $|\cdot|_A$ wohldefiniert, denn der Beweis von Satz 3 zeigt, daß es Konstanten $c > 0$ und $\beta < 0$ gibt, so daß

$$|\xi(t)|^2 \leq c \, \|e^{tA}\|_B^2 \cdot |\xi|^2 \leq c e^{2\beta t} |\xi|^2$$

(für eine geeignete Basis B), also ist

$$\int_0^\infty |e^{tA}\xi|^2 dt = \int_0^\infty |\xi(t)|^2 dt \leq c|\xi| \int_0^\infty e^{2\beta t} = \frac{c|\xi|}{-2\beta} < \infty .$$

(b) Natürlich strebt nun die Lösung $t \mapsto \xi(t)$ in der A-Norm $|\cdot|_A$ streng monoton gegen 0, denn für $0 < t_1 < t_2$ ist

$$|\xi(t_1)|^2 - |\xi(t_2)|^2 = \int_{t_1}^{t_2} |\xi(s)|^2 ds > 0 .$$

BEMERKUNG 4. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ und jeder Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A erfülle $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$. Setzt man

$$P = P(A) := \int_0^\infty e^{tA^*} \cdot e^{tA}\, dt$$

(A^* die Transponierte von A), so gilt:

(a) P ist symmetrisch und positiv definit;
(b) Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ das zu P gehörende Skalarprodukt, $\langle \xi, \eta \rangle_A := \langle \xi, P\eta \rangle$, so gilt für die Liapunov-Norm $|\cdot|_A$ auf $\mathbb{R}^n$:

$$|\xi|_A^2 = \langle \xi, \xi \rangle_A;$$

(c) Es ist $A^* P + PA = -\mathbb{1}$, insbesondere ist

$$\frac{d}{dt} |\xi(t)|_A^2 = -|\xi(t)|^2.$$

Beweis. Ist $\mathrm{Re}(\lambda) < \beta < 0$ für alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ von A, so existiert ein $c > 0$, so daß

$$\| e^{tA^*} \| \leq c e^{\beta t} \quad \text{und} \quad \| e^{tA} \| \leq c e^{\beta t} \quad \forall t > 0$$

(denn $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}) = \mathrm{Re}(\lambda)$). Deshalb ist:

$$\int_0^\infty \| e^{tA^*} \cdot e^{tA} \| \, dt \leq c^2 \int_0^\infty e^{2\beta t} dt = \frac{c^2}{-2\beta} < \infty$$

und das Integral konvergiert, also: P ist wohldefiniert.

a/b)

Weiter:

$$P^* = \int_0^\infty (e^{tA^*} e^{tA})^* dt = \int_0^\infty (e^{tA^*} \cdot e^{tA}) dt = P$$

und

$$\langle \xi, \xi \rangle_A = \langle \xi, \int_0^\infty e^{tA^*} e^{tA} \xi \, dt \rangle = \int_0^\infty \langle e^{tA}\xi, e^{tA}\xi \rangle dt$$

$$= \int_0^\infty |\xi(t)|^2 dt = |\xi|_A^2 > 0$$

(c) $$A^*P + PA = \int_0^\infty (A^* e^{tA^*} \cdot e^{tA} + e^{tA^*} \cdot e^{tA} A) dt$$

$$= \int_0^\infty \{ (\tfrac{d}{dt} e^{tA^*}) e^{tA} + e^{tA^*} (\tfrac{d}{dt} e^{tA}) \} dt$$

$$= \int_0^\infty \tfrac{d}{dt} (e^{tA^*} e^{tA}) dt = e^{tA^*} e^{tA} \Big|_0^\infty = -\mathbb{1}.$$

Weiter:

$$\frac{d}{dt} |\xi(t)|_A^2 = \frac{d}{dt} \langle \xi, P\xi \rangle = \langle \dot{\xi}, P\xi \rangle + \langle \xi, P\dot{\xi} \rangle$$

$$= \langle A\xi, P\xi \rangle + \langle \xi, PA\xi \rangle = \langle \xi, (A^*P + PA)\xi \rangle = -|\xi|^2.$$

☒

Satz 4. Ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $p \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld mit $f(p) = 0$, so gilt: Ist $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von $Df(p)$, so ist p ein Attraktor des Systems $\dot{x} = f(x)$ (kurz: Senke $\Rightarrow$ Attraktor)

Beweis. Sei o.E. $p = 0$ und $A = Df(0)$. Es ist dann $f(x) = Ax + \hat{f}(x)$ mit $\hat{f}(x)/|x| \to 0$ für $x \to 0$.
Sei $c > 0$, so daß $c|x|_A^2 \leq |x|^2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und

$\delta > 0$ so klein, daß

$$|\hat{f}(x)|_A \le \frac{c}{4} |x|_A$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| < \delta$. Für diese x gilt:

$$\frac{d}{dt} |x(t)|_A^2 = \langle \dot{x}, x \rangle_A (t) + \langle x, \dot{x} \rangle_A (t)$$

$$= \langle Ax + \hat{f}(x) \rangle_A (t) + \langle x, Ax + \hat{f}(x) \rangle (t)$$

$$= \left(\langle Ax, x \rangle_A + \langle x, Ax \rangle_A \right)(t) + \left(\langle \hat{f}(x), x \rangle_A + \langle x, \hat{f}(x) \rangle_A \right)(t)$$

$$= \langle x, (A^*P + PA)x \rangle (t) + (\ldots) = -|x(t)|^2 + (\ldots)$$

$\Rightarrow$ (Cauchy-Schwarz) :

$$\frac{d}{dt} |x(t)|_A^2 + |x(t)|^2 \le 2 |\hat{f}(x)|_A \cdot |x|_A \le \frac{c}{2} |x|_A^2 ,$$

also:

$$\frac{d}{dt} |x(t)|_A^2 \le -|x(t)|^2 + \frac{c}{2} |x(t)|_A^2 \le -\frac{c}{2} |x(t)|_A^2$$

Mit Gronwalls Lemma ist daher

$$|x(t)|_A^2 \le |x|_A^2 \, e^{-\frac{c}{2} t} \longrightarrow 0 \quad \text{für } t \to \infty .$$

Also ist $x_0 = 0$ ein Attraktor.

$\blacksquare$